ISTITUTO INTERNAZIONALE STUDI AVANZATI DI
SCIENZE DELLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO
Geometria proiettiva, Geometria descrittiva, Rilevamento, Fotogrammetria

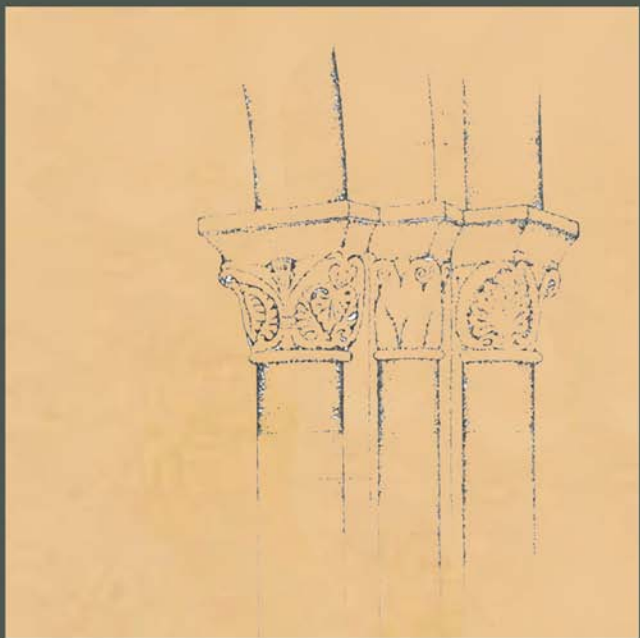
INTERNATIONAL INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES OF
SPACE REPRESENTATION SCIENCES
Projective geometry, Descriptive geometry, Survey, Photogrammetry

Palermo, Italia

Università degli Studi di Palermo

Giuseppe Maria Catalano

PROSPETTIVA TELECENTRICA



1988

INTRODUZIONE

Rappresentare in prospettiva riducendo al minimo le aberrazioni implica il posizionamento del centro di proiezione rispetto al quadro in relazione alla distanza da cui l'osservatore dovrà esaminare l'immagine disegnata: le aberrazioni diminuiscono, ovviamente, quanto più il centro di proiezione si approssima alla posizione dell'osservatore.

Tale collocazione allontana il centro dal quadro, tanto da portare molti elementi di fuga notevolmente fuori foglio, rendendo peraltro molto laboriose le consuete operazioni di ribaltamento.

Non essendo certo consigliabile il ricorso all'uso di strumenti di notevoli dimensioni, potrebbe operarsi riducendo dapprima opportunamente tutto l'apparato prospettico in modo da far avvicinare i1 centro di proiezione V e, conseguentemente, gli elementi di fuga entro i limiti desiderati, ingrandendo successivamente il disegno ottenuto.

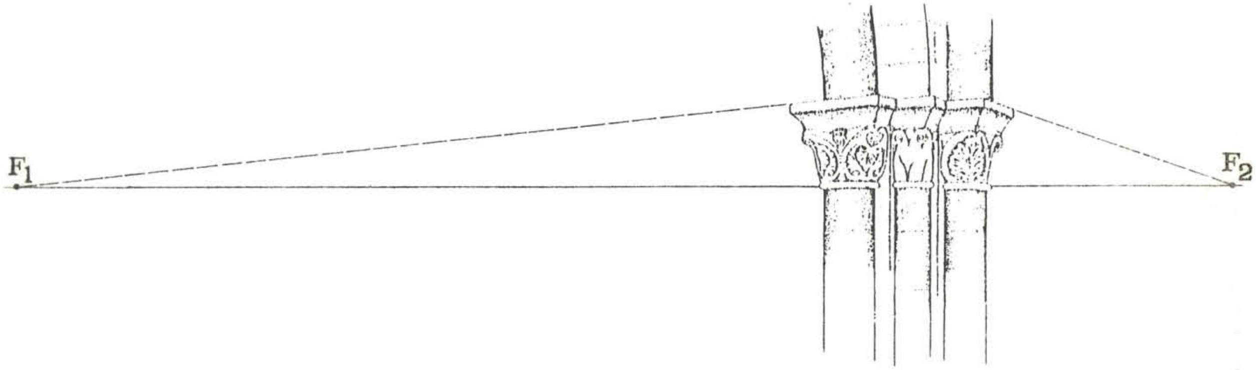
Tale procedura, però, si complica quanto più V si allontana dal quadro provocando errori non trascurabili nella fase di ingrandimento.

Le tavole I e II mostrano in proposito il rapporto fra due rappresentazioni degli stessi elementi architettonici, la prima eseguita riducendo la distanza V dal quadro (e quindi la dimensione del manufatto, etc.) per eseguire un successivo ingrandimento, la seconda operando direttamente col centro lontano dal quadro.

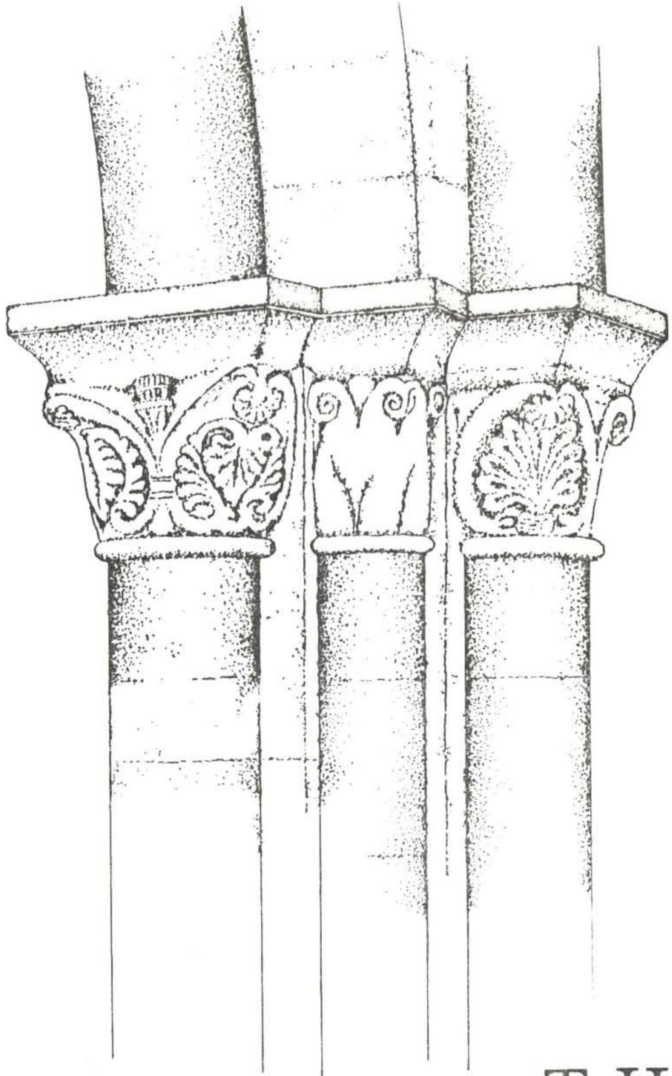
Lo sviluppo teorico che si è affrontato vuol essere l'approccio ad un modo nuovo di operare direttamente in prospettiva, senza limiti restrittivi nella collocazione del punto di vista V, senza bisogno di elementi di fuga o di operazioni di ribaltamento di V sul quadro.

Essendo la lontananza del centro di proiezione dal quadro l'elemento caratterizzante il metodo presentato, si propone di chiamare "telecentrico" tale modo di operare in prospettiva (dai termini greci thle = lontano e kcv¯rpov = centro).

E' desiderio dell'Autore che la trattazione, limitata in questa prima parte alla prospettiva su quadro verticale, trovi prossimamente degno completamento in uno sviluppo teorico che consideri il quadro prospettico comunque inclinato.



T.I



T.II

TEORIA

Principi teorici

Si riporti in prospettiva un cubo di lato 1, avente due facce parallele al quadro, tracciando direttamente spigoli e vertici, senza far uso di punti o rette di fuga (Fig. 1).

Se assumiamo la faccia anteriore appartenente al quadro e quella inferiore al geometrale, ad ogni configurazione del cubo, da noi scelta, corrisponde, evidentemente, una ben precisa posizione del centro di proiezione, V, nello spazio.

Basterà prolungare le immagini di due qualsiasi spigoli ortogonali al quadro, per individuarne nell'intersezione il punto di fuga Vo.

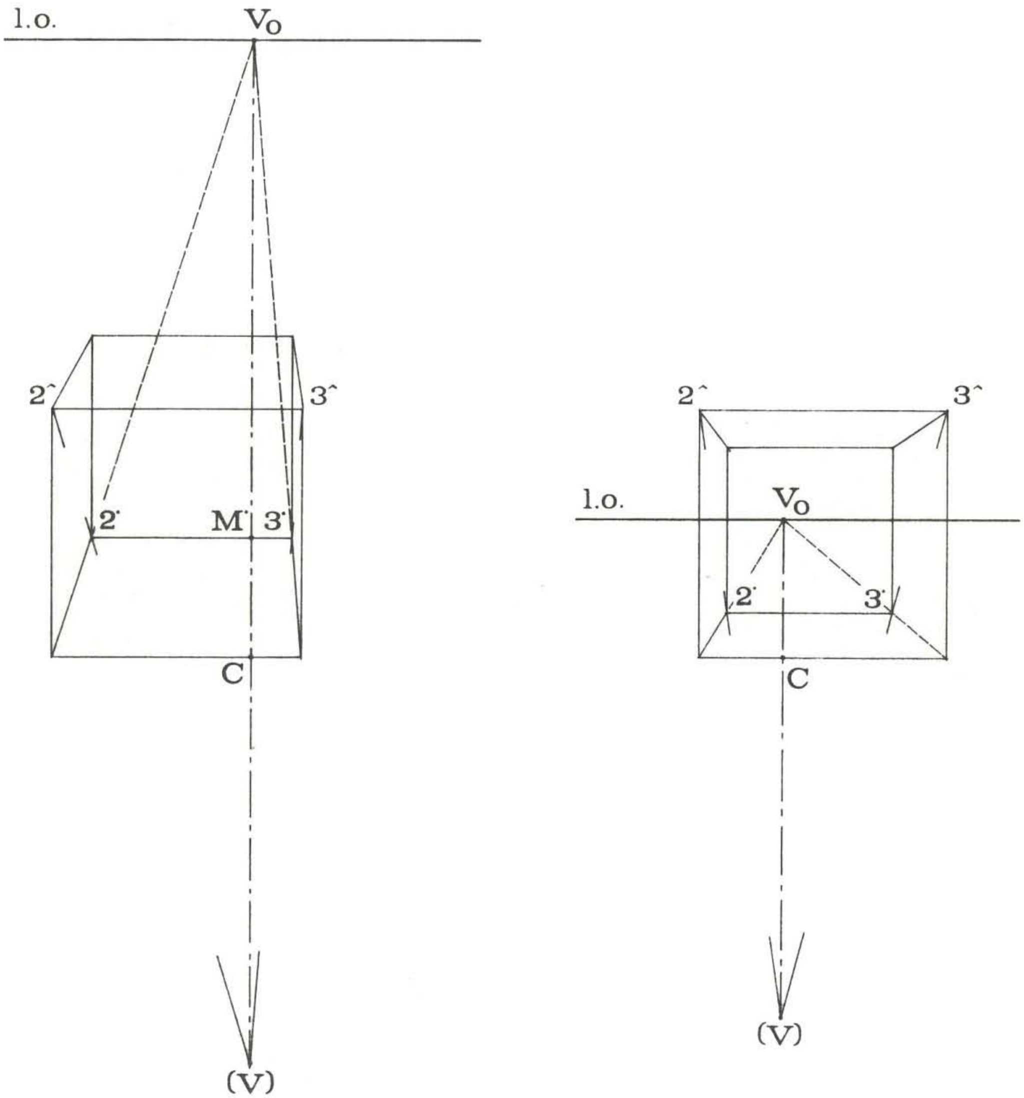
Consideriamo poi lo spigolo $2^{\wedge}3^{\wedge}$, come immagine dello spigolo 2'-3' ottenuta in seguito al ribaltamento sul quadro della faccia inferiore del cubo: le congiungenti $2^{\wedge}2'$ e 3^3' definiscono, allora, per intersezione il punto (V), immagine del centro di proiezione V dovuta al ribaltamento sul quadro del piano proiettante parallelo alla faccia suddetta.

Il segmento V_o -(V) fornisce, allora, la distanza del centro V dal quadro, mentre V_o - C dà la quota di V rispetto al geometrale.

Se consideriamo il cubo come struttura di riferimento per la rappresentazione prospettica di una qualsiasi configurazione spaziale, potremo fare a meno di punti e rette di fuga, potremo cioè disegnare in prospettiva anche se la distanza di V dal quadro è tale da cadere notevolmente fuori foglio.

L'immagine del cubo di riferimento può occupare gran parte del foglio: essa può immediatamente tracciarsi una volta fissata la distanza di V dal quadro q e dal geometrale g (Fig.2).

Chiamiamo M e C i punti in cui il piano proiettante verticale ortogonale al quadro incide i lati della faccia inferiore del cubo: se, ad esempio, fissiamo il lato 1 del cubo pari ad un terzo della distanza V_o-V, la similitudine dei triangoli VV_o M' e MCM' porge immediatamente che M'C è pari ad un quarto di V_o-C, distanza di V dal geometrale (Fig.2a), così come la similitudine fra i triangoli prospettici V_o C 4 e V_o M' 3' fornisce per M'3'



F.1

un valore ridotto di un quarto rispetto a quello di C4 e quindi per 2'3' un valore ridotto di un quarto rispetto a quello di 14 (Fig. 2b).

Si può così tracciare rapidamente l'immagine del cubo di riferimento in funzione dei dati fondamentali prefissati, senza ricorrere a elementi esterni lontani, ma basandosi soltanto su semplici rapporti di similitudine.

E' importante mostrare sin d'ora come le immagini di due qualsiasi facce del cubo definiscono perfettamente una relazione omologica (Fig. 3).

Le due facce parallele al quadro sono in relazione omotetica, (essendo l'asse improprio e il centro proprio), quelle ortogonali al quadro e parallele fra loro determinano affinità ortogonali (essendo l'asse proprio e il centro all'infinito in direzione ortogonale all'asse), quelle contigue, infine, individuano sempre omologie ad asse e centro propri.

In ogni caso sono note più coppie di punti corrispondenti, fornite dai vertici del poliedro, coppie che sopperiscono alla mancanza, caso per caso, del centro o dell'asse.

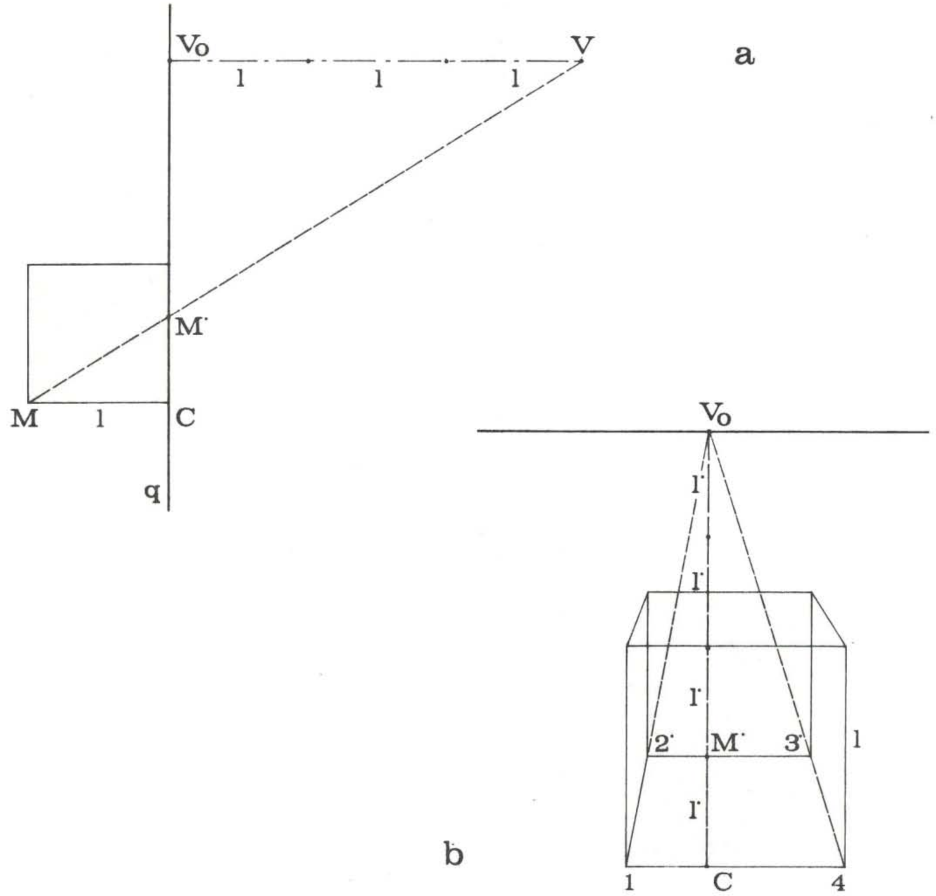
Questa interessante proprietà, che, come vedremo è posta alla base della trattazione, può essere utilizzata anzitutto nel ribaltamento sul quadro delle facce ortogonali ad esso.

In questo caso potremmo allora ribaltare tali facce esternamente al cubo (Fig. 3a), ovvero, secondo lo spazio di cui si dispone, in parte esternamente e in parte sulla faccia anteriore definente il quadro (Fig.3b, 3c).

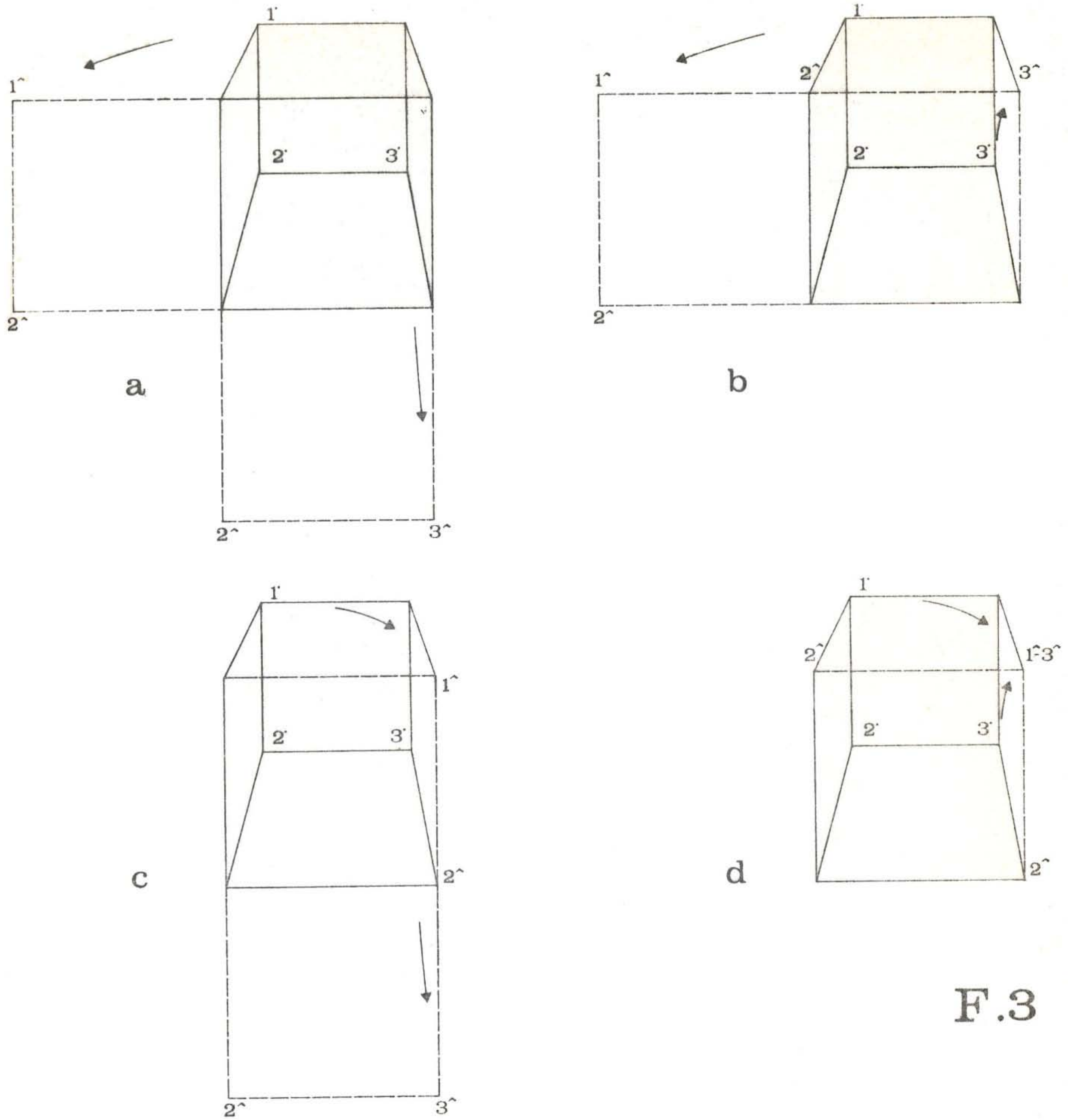
Nel seguito tuttavia, per motivi di spazio, si ribalterà sempre facendo scorrere le facce internamente al cubo (Fig. 3d).

Naturalmente si considereranno i piani contenenti le sei facce nella loro infinità, sicché la struttura cubica provvista di spigoli infiniti va vista soltanto come reticolo d'appoggio, come elemento necessario per definire i sei piani di riferimento e instaurare le relative omologie.

Al piano all'infinito sostituiamo dunque come riferimento il piano contenente la faccia posteriore del cubo, ma ciò non vieterà di raggiungere ugualmente l'infinito.



F.2



F.3

Il punto

Un punto viene definito, come è noto, mediante la propria immagine prospettica e l'immagine di una qualsiasi proiezione ortogonale di esso su uno dei piani di riferimento.

Si voglia tracciare in prospettiva l'immagine P' del generico punto P del geometrale.

Consideriamo allora il ribaltamento di quest'ultimo, sul quadro intorno alla traccia tlg, di guisa che i punti prospettici 2' e 3' abbiamo come corrispondenti sul quadro i punti 2^ e 3^ (Fig. 4).

E' definita in tal modo, mediante l'asse tlg e le due coppie di punti 2^, 2' e 3^, 3', l'omologia ad asse e centro propri che lega l'immagine prospettica del geometrale al quadro.

Tale omologia consente di trovare rapidamente di ogni punto P la relativa immagine prospettica P' e viceversa.

Si mandino per i punti 2^ e 3^ le rette s^ e p^ contenenti il generico punto P^: esse incidono l'asse tlg nelle tracce Ts e Tp. Le omologhe prospettiche s' e p', individuate ovviamente dalle tracce suddette e dai punti corrispondenti 2' e 3', s'intersecano nel punto P' omologo di P^.

Per l'individuazione di un altro punto prospettico, come il punto Q' omologo di Q^ o il punto R' omologo di R^, ci si può adesso appoggiare anche alla coppia P^, P' già trovata (Fig. 4).

Tale circostanza risulta particolarmente utile quando il punto ribaltato si colloca in vicinanza alla retta 2^ - 3^, poiché in tal caso una o entrambe le rette per 2^ e 3^, necessarie per il trasporto omologico, hanno traccia fuori foglio.

Così, ad esempio, il punto C'g, omologo di C^g, viene immediatamente individuato appoggiandosi alle coppie già note A^, A' e B^, B' (Fig. 6).

Supponiamo ora che il punto A non appartenga al geometrale, ma si trovi a quota h rispetto ad esso (Fig. 5).

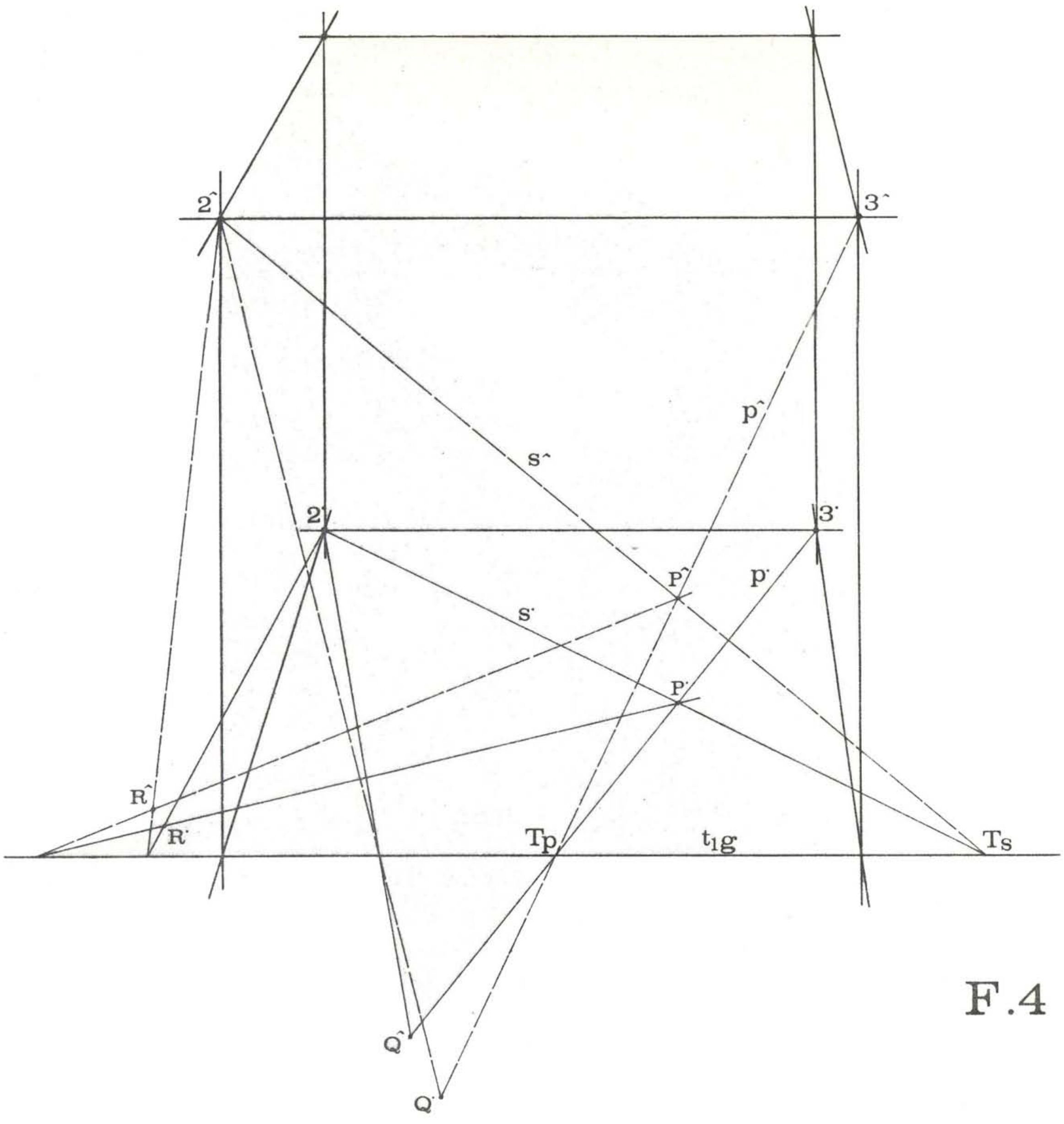
Individuata l'immagine prospettica A'g della proiezione Ag di esso sul geometrale, occorre riportare in prospettiva sulla verticale per A'g la prospet tiva h' della quota h.

A tal fine possono seguirsi più vie. Possiamo considerare la relazione omologica tra l'immagine prospettica del piano verticale α contenente 2' ed A'g e la proiezione ortogonale di α sul quadro: tale omologia ha asse al finito nella traccia $t_1\alpha$ di α sul quadro ed è definita dalle coppie omologhe 2,$\underline{2}$ e l_{oo} $\underline{1}_{oo}$ (punti impropri), supponendo V_o, punto di fuga delle ortogonali al quadro, notevolmente fuori foglio.

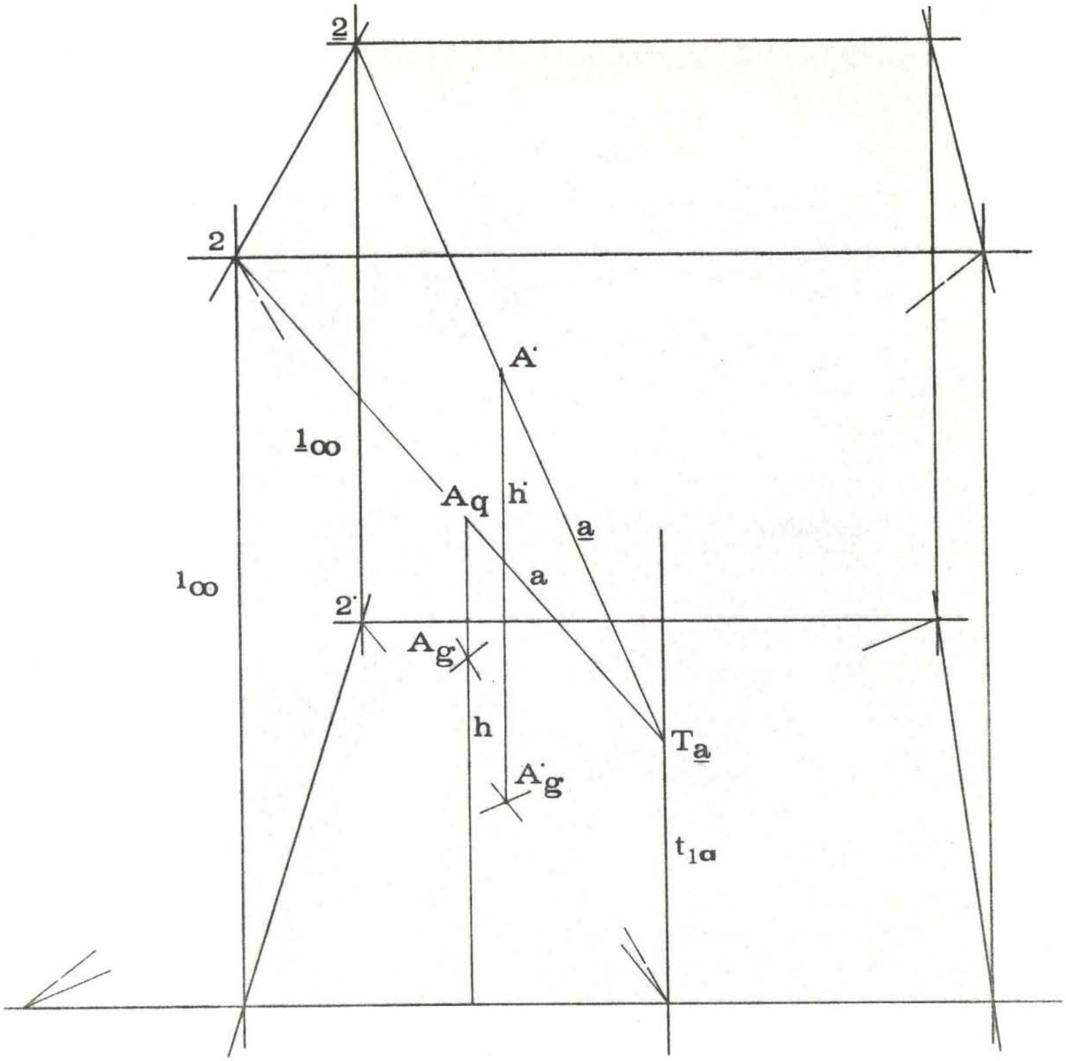
Fissata allora la quota h sulla verticale del quadro per Ag (corrispondente di A'g nel ribaltamento del geometrale sul quadro) si mandi la retta a per i punti 2 e Aq, estremo di h, intersecante in T$\underline{a}$ la $t_1\alpha$: l'omologa $\underline{a}$ per T$\underline{a}$ e $\underline{2}$ interseca la verticale per A'g in A', prospettiva di A.

Riferendosi adesso al punto C (Fig. 6), determinata, come prima, l'immagine prospettica C'g della proiezione di C sul geometrale, e disposta la quota h sulla verticale del quadro per $C^{\wedge}$g (corrispondente di C'g sul quadro), può operarsi la traslazione prospettica di Cq estremo di h in C' mediante i triangoli omotetici R_1-S_1-Cq (estremo di h) ed R-C'-C'g.

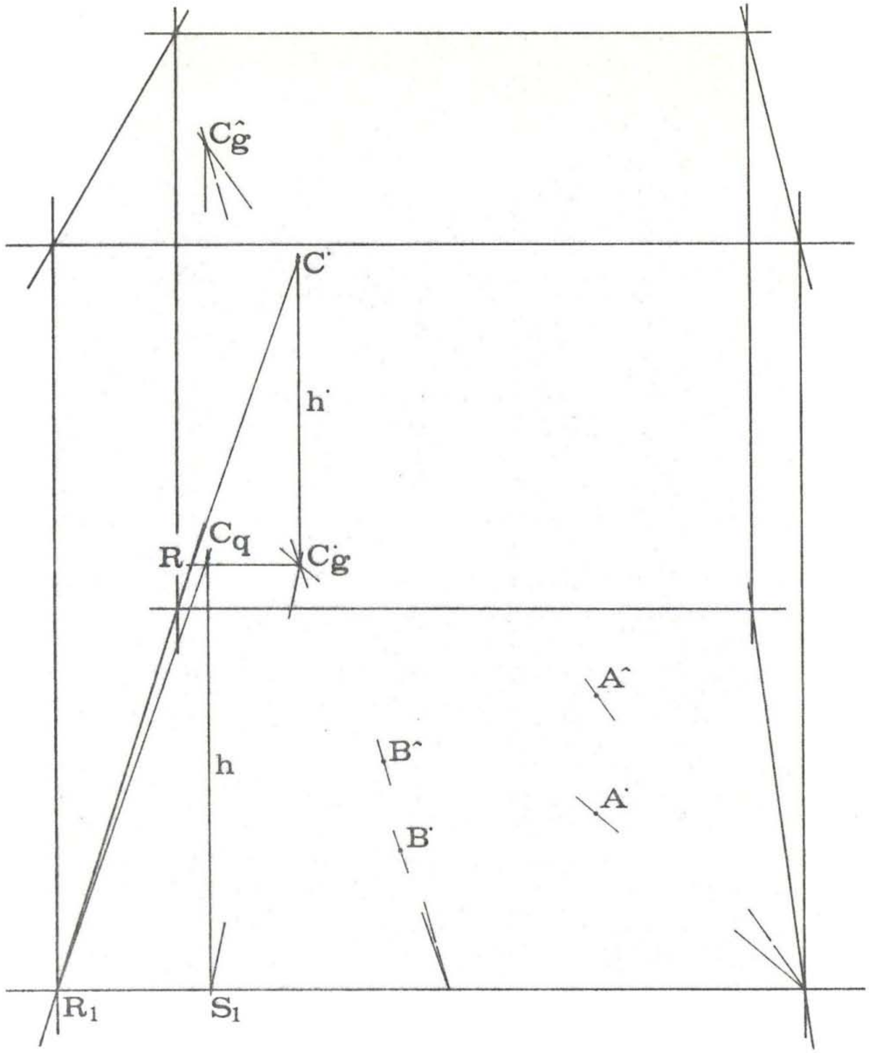
Tale omotetìa può instaurarsi fra il quadro e qualsiasi piano ad esso parallelo, come il piano verticale per C'g ed R ; purché siano dati due segmenti corrispondenti come R_1-S_1 ed R-C'g.



F.4



F.5



F.6

La retta

Una retta viene definita mediante l'individuazione prospettica di due punti qualsiasi di essa. Si tratterà generalmente di punti propri, essendo la prospettiva del punto improprio, il più delle volte, lontana dai limiti del foglio.

Consideriamo, ad esempio, la generica retta r del geometrale (Fig. 7): essa resta definita in prospettiva dai punti N' e Q', immagini di due qualsiasi punti N e Q di essa, ma può anche individuarsi tramite Q' (o N') e la traccia Tr sul quadro, o, ancora, tramite due qualsiasi tracce sui sei piani di riferimento.

Quando la generica retta s è parallela al quadro, la prospettiva del punto improprio di essa fornisce la direzione della immagine prospettica s' di s, sicché basta l'immagine P' di un sol punto P al finito per definire (insieme al punto improprio) la retta.

Per eseguire qualsiasi operazione sulle rette del geometrale conviene ribaltare lo stesso intorno alla traccia l.t. sul quadro, legando omologicamente (secondo quanto già esposto) le rette ribaltate alle rette prospettiche in modo che alla retta r^ corrisponda la r', alla s^ la s' e viceversa (Fig. 7).

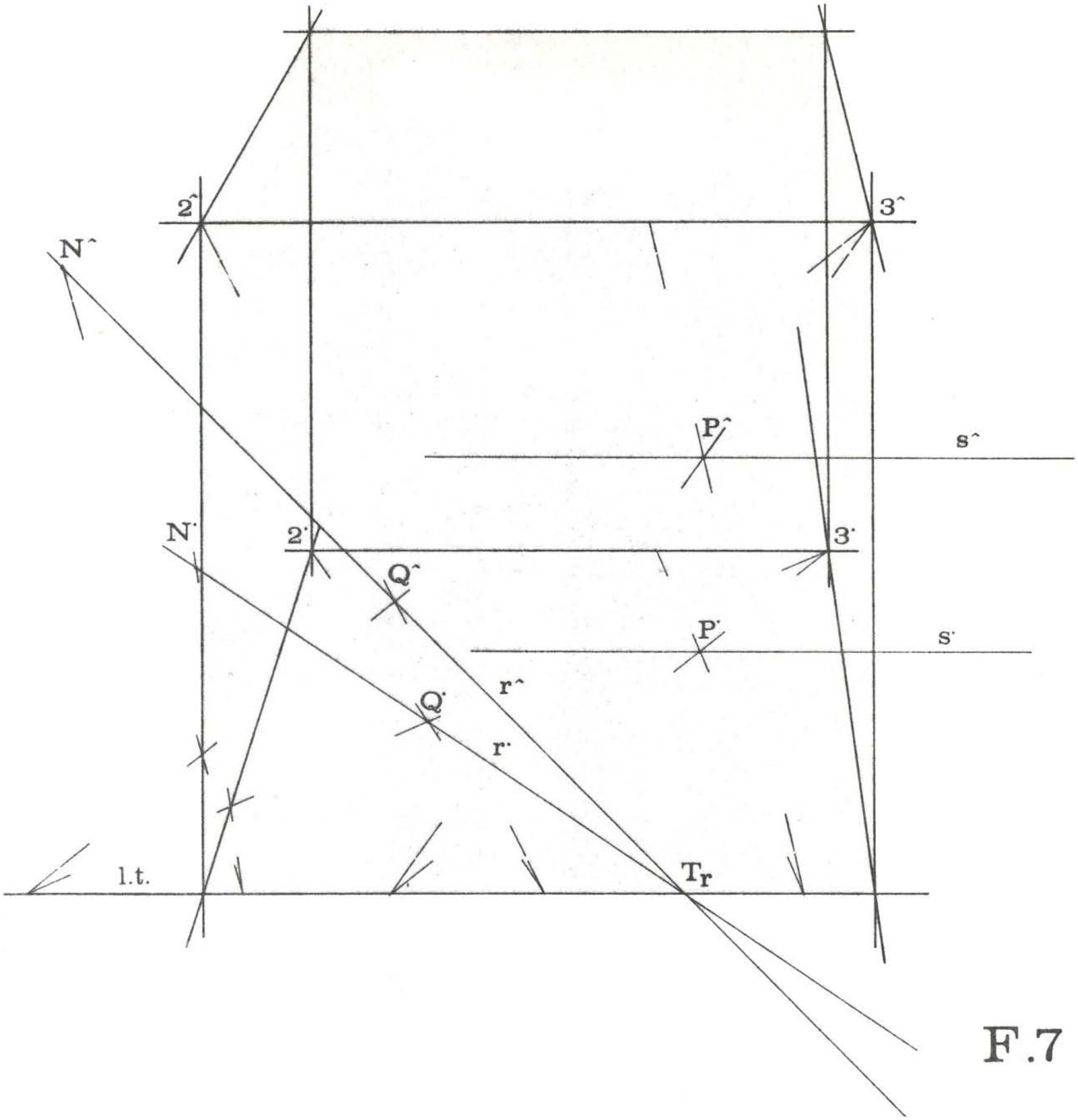
Quanto espresso a proposito del geometrale potrebbe ovviamente, ripetersi per ciascun piano di riferimento ortogonale al quadro .

La prospettiva r' della generica retta r dello spazio (Fig. 8) viene individuata, ad esempio, dalla traccia Tr sul quadro e dal punto P', prospettiva del generico punto P, essendo P'g la prospettiva di Pg, proiezione ortogonale di P sul geometrale.

Per operare liberamente sulla r conviene ribaltare sul quadro un qualsiasi piano del fascio avente per asse la retta.

Consideriamo, ad esempio, il piano β verticale contenente la r, avente traccia sul quadro nella retta tβ e sul geometrale nella retta r'g per Trg, intersezione fra la tβ e la 1.t., e P'g.

Ribaltando il geometrale sul quadro, P'g viene ribaltato in Pg ed A'



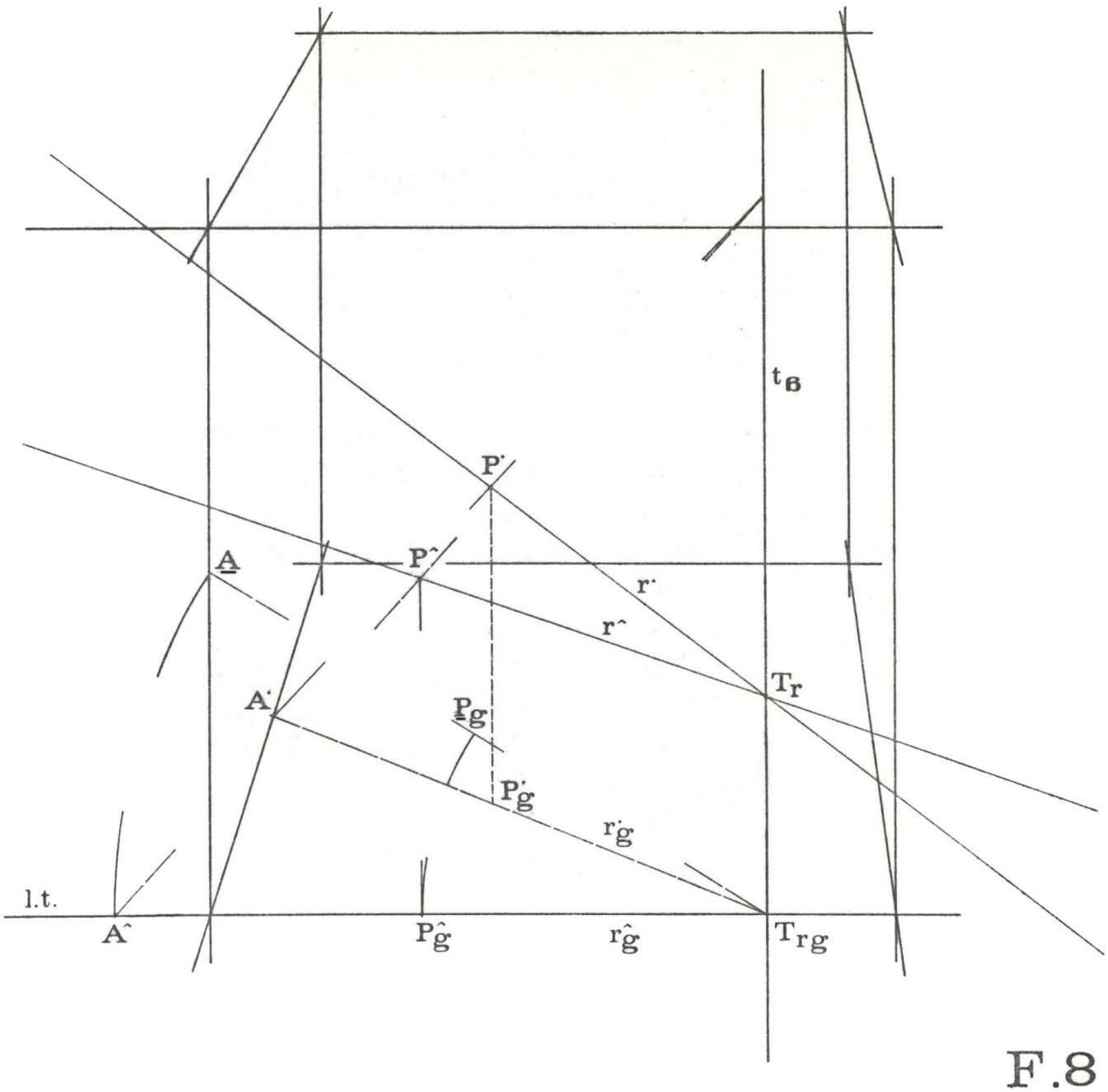
F.7

in $\underline{A}$; nel ribaltamento di β sul quadro il punto $A^\wedge$, ribaltato di A', ha da Trg , sulla 1.t. , la stessa distanza di $\underline{A}$, così come Pg^ ha da Trg la stessa distanza di $\underline{P}g$: note allora le coppie corrispondenti A^-A' e $P^\wedge g$-Pg' è individuata l'omologia di asse tβ che lega la r' alla r^, sicché è immediato ribaltare qualsiasi punto P' nel corrispondente P^ e viceversa.

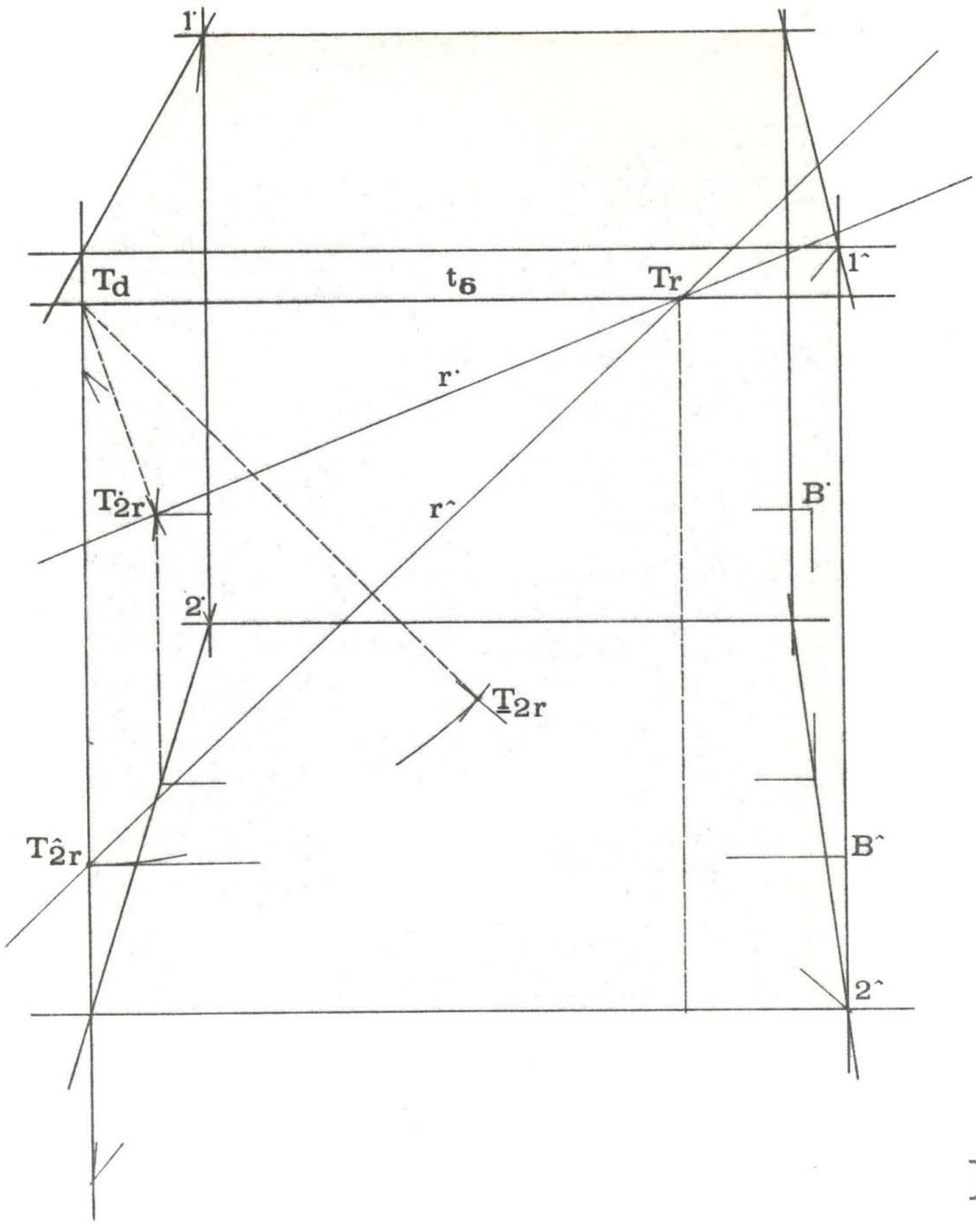
Possiamo, ancora, considerare, al fine di ribaltare la r, il piano δ contenente quest'ultima, avente traccia sul quadro in tδ (Fig.9).

Detta T'_{2r} la prospettiva della traccia T_{2r} di r sul piano di riferimento sinistro, occorre anzitutto ribaltare quest'ultimo sul quadro, in modo da portare T'_{2r} in $\underline{T}_{2r}$; nel ribaltamento di δ sul quadro il punto $T^\wedge_{2r}$, ribaltato di T'_{2r} , ha da Td, intersezione della tδ con la traccia del piano di riferimento sinistro, la stessa distanza di $\underline{T}_{2r}$, sicché resta individuata la coppia corrispondente $T^\wedge_{2r}$, T'_{2r}. Una seconda coppia potrà, ad esempio, tracciarsi, considerando che B' prospettiva di B, intersezione della orizzontale per T_{2r} col piano di riferimento destro, ha come corrispondente il punto $B^\wedge$, intersezione della orizzontale per $T^\wedge_{2r}$ con la traccia del piano citato sul quadro.

Per finire bisogna ancora aggiungere che, in presenza di rette parallele al quadro, non occorrono ribaltamenti di piani, ma basta operare omoteticamente, secondo quanto già esposto nel paragrafo precedente, mettendo in relazione i punti appartenenti al piano contenente la retta e parallelo al quadro, coi punti di quest'ultimo.



F.8



F.9

Il piano

II generico piano può essere definito, come è noto, quando siano individuati prospetticamente tre qualsiasi punti di esso non giacenti sulla stessa retta, ovvero quando siano dati un punto e una retta o ancora due rette appartenenti ad esso.

E' conveniente individuare il piano mediante le due tracce, sui piani di riferimento, parallele al quadro (Fig. 10).

Supponiamo, ad esempio, di dover ribaltare sul quadro q il piano ϖ definito dalle tracce $t_{1\varpi}$, su q, e $t_{2\varpi}$ sul piano di riferimento parallelo a q.

Mandiamo, anzitutto, dai vertici 1 e 2 le perpendicolari alle due tracce, individuando i punti Q_1 e Q': questi definiscono la retta m', prospettiva della retta m di ϖ di massima pendenza rispetto al quadro.

In seguito al ribaltamento di ϖ sul quadro i punti Q ed S della m, si ritrovano sulla m^ definita dalla 1-Q_1, in Q^ ed S^.

Per ottenere questi ultimi ed instaurare la nota omologia di ribaltamento, conviene anzitutto proiettare ortogonalmente Q sul quadro in Qq, per mezzo dei triangoli omotetici 2-Q'-3 e 1-Qq-4.

Ribaltando il piano per m ed m^ sul quadro il punto Q si ritrova in $\underline{Q}$ sulla perpendicolare alla m^ per Qq alla distanza 1 da quest'ultimo (essendo 1 il lato del cubo di riferimento) e la retta m si porta in $\underline{rn}$ individuando sulla perpendicolare ad essa per 1 il punto $\underline{S}$ corrispondente di S'.

$\underline{Q}$-Q_1 e$\underline{S}$-Q_1forniscono allora rispettivamente le distanze di Q ed S da Q_1, permettendo il ribaltamento di tali punti sulla m^ in Q^ ed S^.

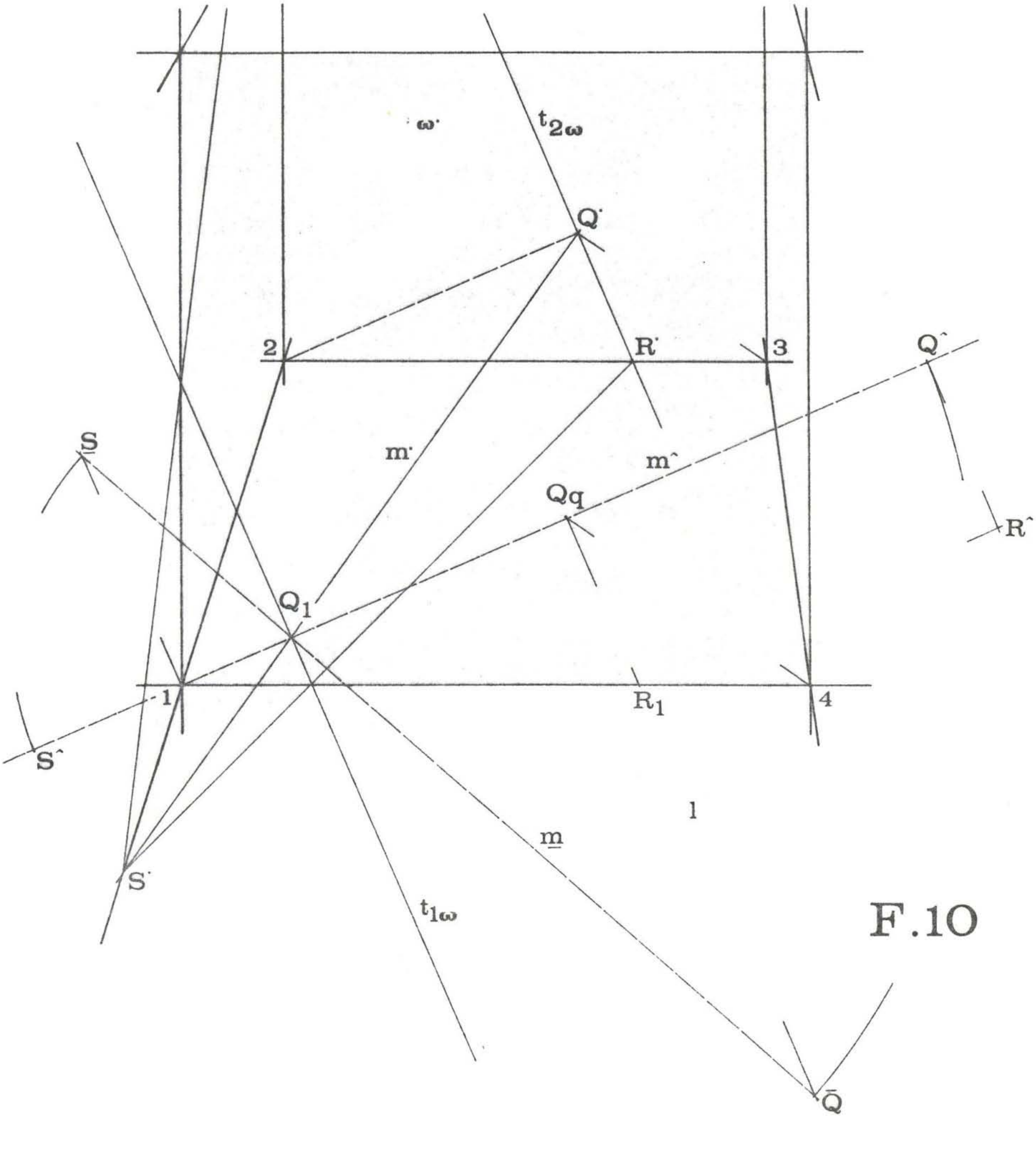
Sono note dunque le coppie omologhe Q'-Q^ e S'-S^ che insieme all'asse $t_{1\varpi}$ definiscono l'omologia di ribaltamento richiesta.

E' bene rilevare ancora che, noto Q^ un secondo punto ribaltato poteva immediatamente ottenersi traslando dapprima il segmento Q' R' in Qq R_1 e successivamente quest'ultimo in Q^B in modo da ribaltare R' in

$\hat{R}$.

Quando poi la traccia $t_{2\varpi}$ va fuori foglio, può sostituirsi al piano di riferimento corrispondente un altro piano sempre parallelo al quadro, ma posto alla distanza di 1/2 o 1/4 da esso, in modo da ottenere una traccia sempre parallela alla $t_{1\varpi}$ ma ricadente entro i limiti del foglio.

Se infine il piano è parallelo al quadro l'asse d'omologia va all'infinito e può operarsi mediante il metodo citato dei triangoli omotetici.



F.10

Intersezione di piani, intersezione di retta e piano

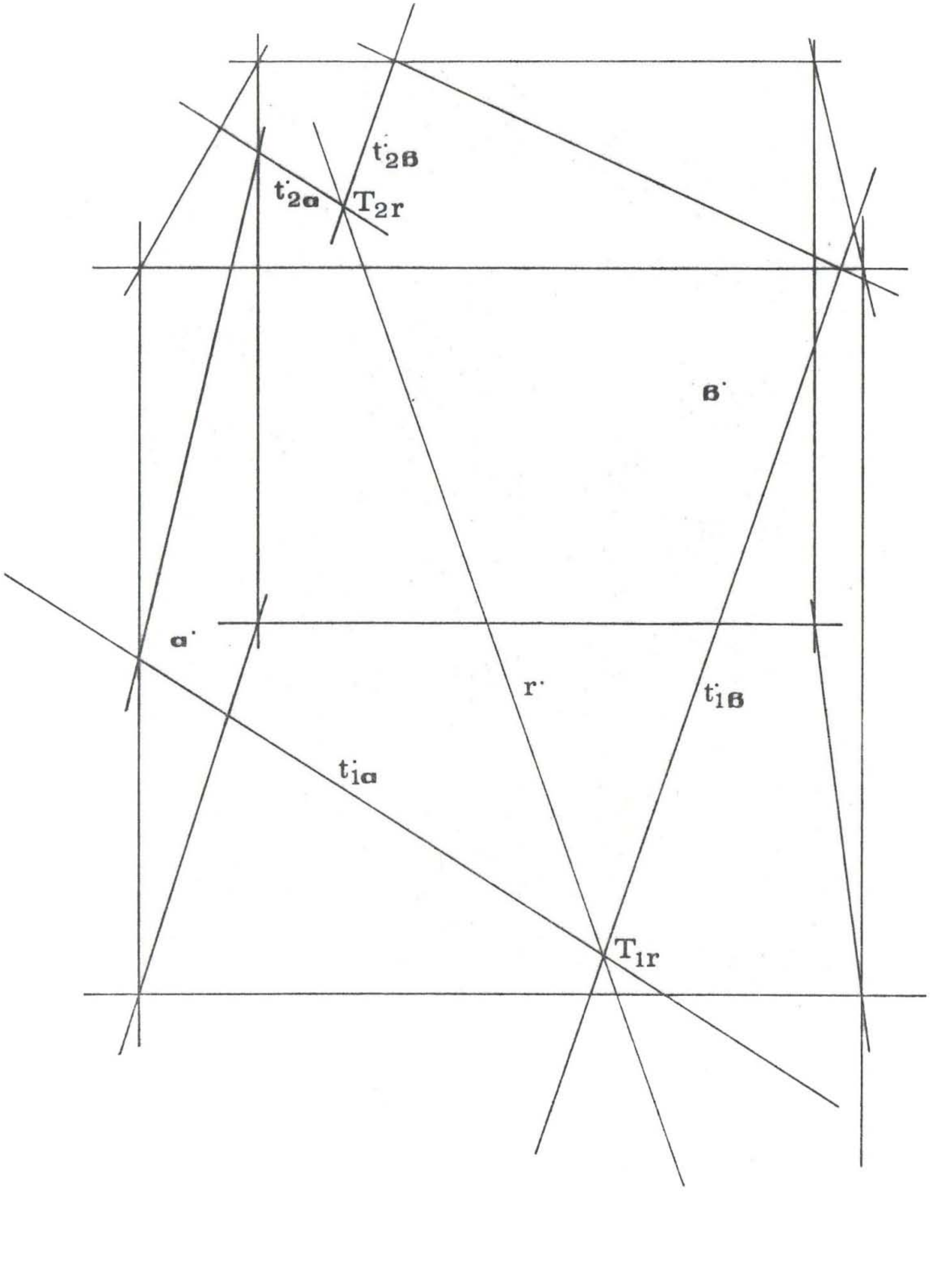
Dati due generici piani α e β, condizione necessaria e sufficiente, affinché la retta r sia luogo dei punti comuni ai due piani è che ciascuna traccia di essa sui piani di riferimento sia coincidente con l'intersezione delle corrispondenti tracce di α e β, (Fig. 11).

Così, ad esempio, la retta r avrà prospettiva r' per T_{1r} e T_{2r} , essendo T_{1r} intersezione di $t_{1\alpha}$ e $t_{1\beta}$, tracce dei piani α e β, sul quadro, e T_{2r} intersezione di $t_{2\alpha}$ e $t_{2\beta}$, tracce degli stessi piani sul piano di riferimento parallelo al quadro.

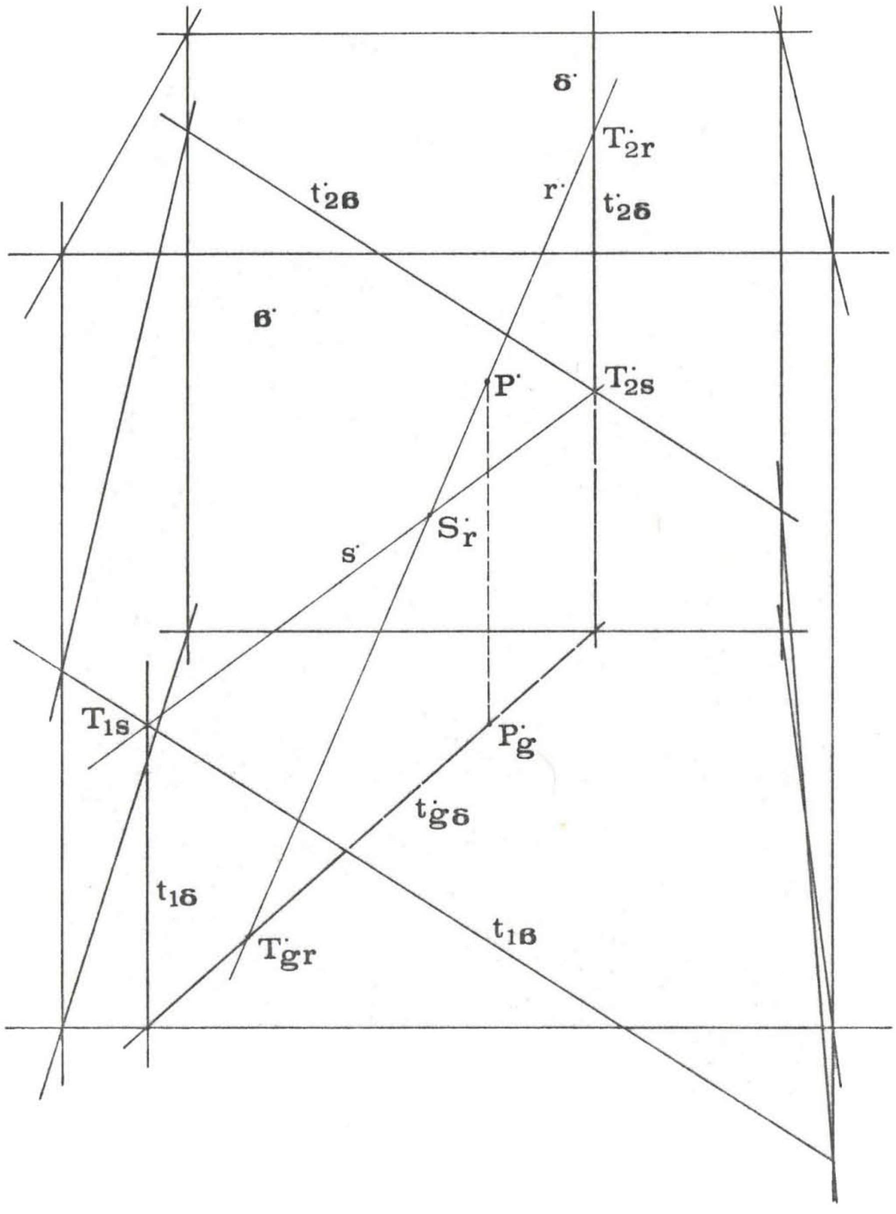
Dati la generica retta r, individuata ad esempio, dalla traccia Tgr sul geometrale e dal punto P, e il piano β definito dalle tracce $t_{1\beta}$ e $t_{2\beta}$ rispettivamente sul quadro e sul piano di riferimento ad esso parallelo, si voglia tracciare la prospettiva S'r dell'intersezione Sr di r e β (Fig. 12).

Si consideri, a tal fine, il piano δ verticale contenente la retta r: esso avrà traccia $t'g\delta$ sul geometrale per T'gr e P'g e tracce $t'_{1\delta}$ e $t'_{2\delta}$ verticali sul quadro e sul piano di riferimento parallelo al quadro.

La retta s, intersezione di β e δ , ha traccia T_{1s}, intersezione di $t_{1\beta}$ e $t_{1\delta}$ e traccia T'_{2s}, intersezione di $t'_{2\beta}$ e $t'_{2\delta}$: è definita pertanto la prospettiva s' di s che, appartenendo a β e δ, interseca la r' nel punto S'r cercato.



F.11



F.12

Traslazione prospettica di segmento.

Si voglia traslare il generico segmento a, di estremi D e C, parallelo al quadro in modo che D coincida con un qualsiasi punto D_2 prefissato (Fig. 13).

Consideriamo allora le tracce t'gβ e t'vβ del piano verticale β contenente il segmento D'C' e le tracce t'gδ e t'vδ del piano verticale δ contenente D'_2 e parallelo a β .

Le tracce t'vβ e t'vδ sul piano di riferimento sinistro incidono lo spigolo superiore del cubo rispettivamente in B' e B'_1 e poiché i due piani sono paralleli al quadro è immediato instaurare un rapporto omotetico tracciando dapprima il triangolo B'C'D' e successivamente il triangolo B'_1 C'_1 D'_1 (avente ovviamente i lati paralleli al primo): in tal modo si trasla rapidamente D'C' in D'_1 C'_1.

A tal punto, non resta che traslare D'_1 C'_1 in D'_2 C'_2, essendo tali segmenti prospetticamente uguali perché appartenenti entrambi a δ , piano, come si è detto, parallelo al quadro.

Supponiamo adesso di voler traslare il segmento AB ortogonale al quadro, in modo che l'estremo A di esso vada a coincidere col generico punto A_l prefissato (Fig. 14).

Tracciamo, allora, la orizzontale per A_{1g}, prospettiva della proiezione A_{1g} di A_l sul geometrale, la quale interseca la retta r', contenente A' B' nel punto C'_1 e la retta di riferimento destra del geometrale in D'_1.

Il triangolo A'_1-C'_1-D'_1 appartiene ovviamente ad un piano parallelo al quadro: pertanto avrà come omotetico il triangolo T_{ls} -T_{lr} -D, determinando in T_{1s} la traccia della retta s, su cui intendiamo traslare il segmento AB.

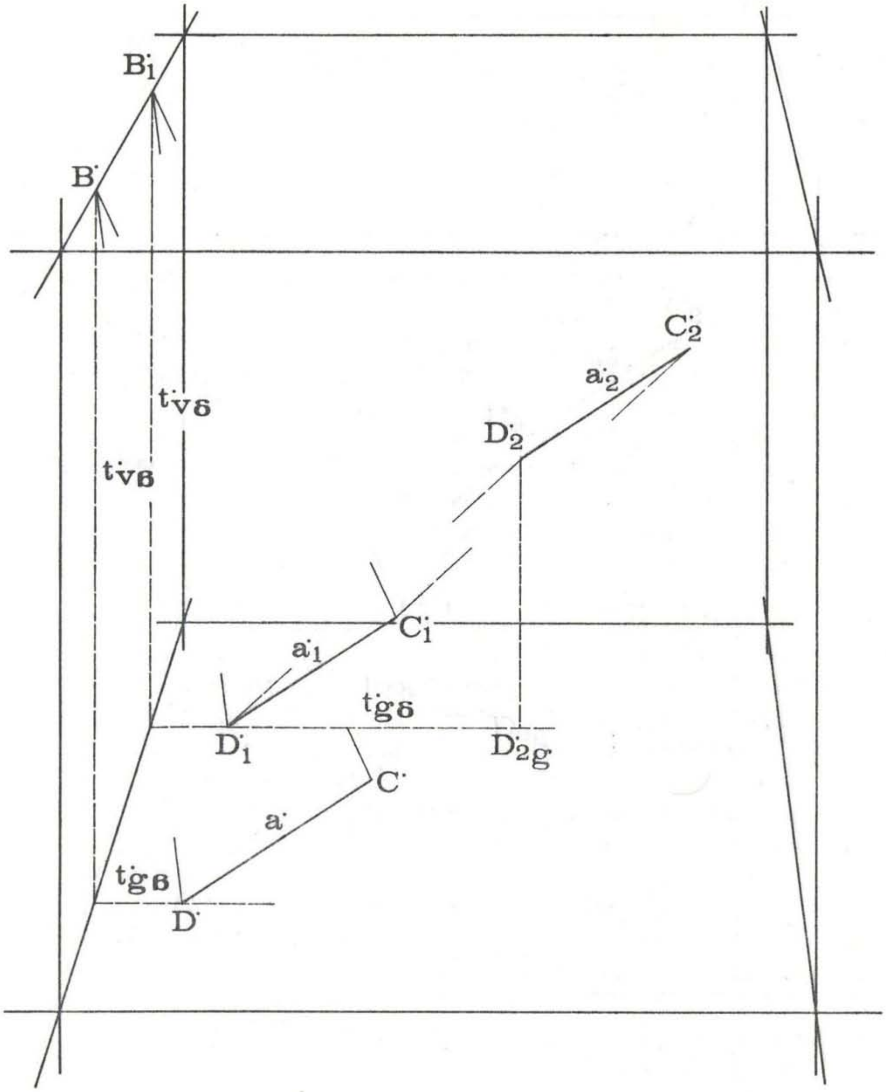
Tracciamo dunque la s' per T_{1s} e A'_1, nonché M'_1 ed M'_2 punti medi, geometrici e prospettici, rispettivamente dei segmenti T_{1r} -T_{ls} e C'_1-A'_1: la congiungente essi taglia A'_1-B'_1 nel punto M', prospettiva del punto M, medio del segmento A_l-B.

La A'M' interseca allora la s' nel punto B'_1, secondo estremo del segmento A'_1 B_1 cercato, essendo nello spazio uguali i triangoli A B M e B_1 A_l M.

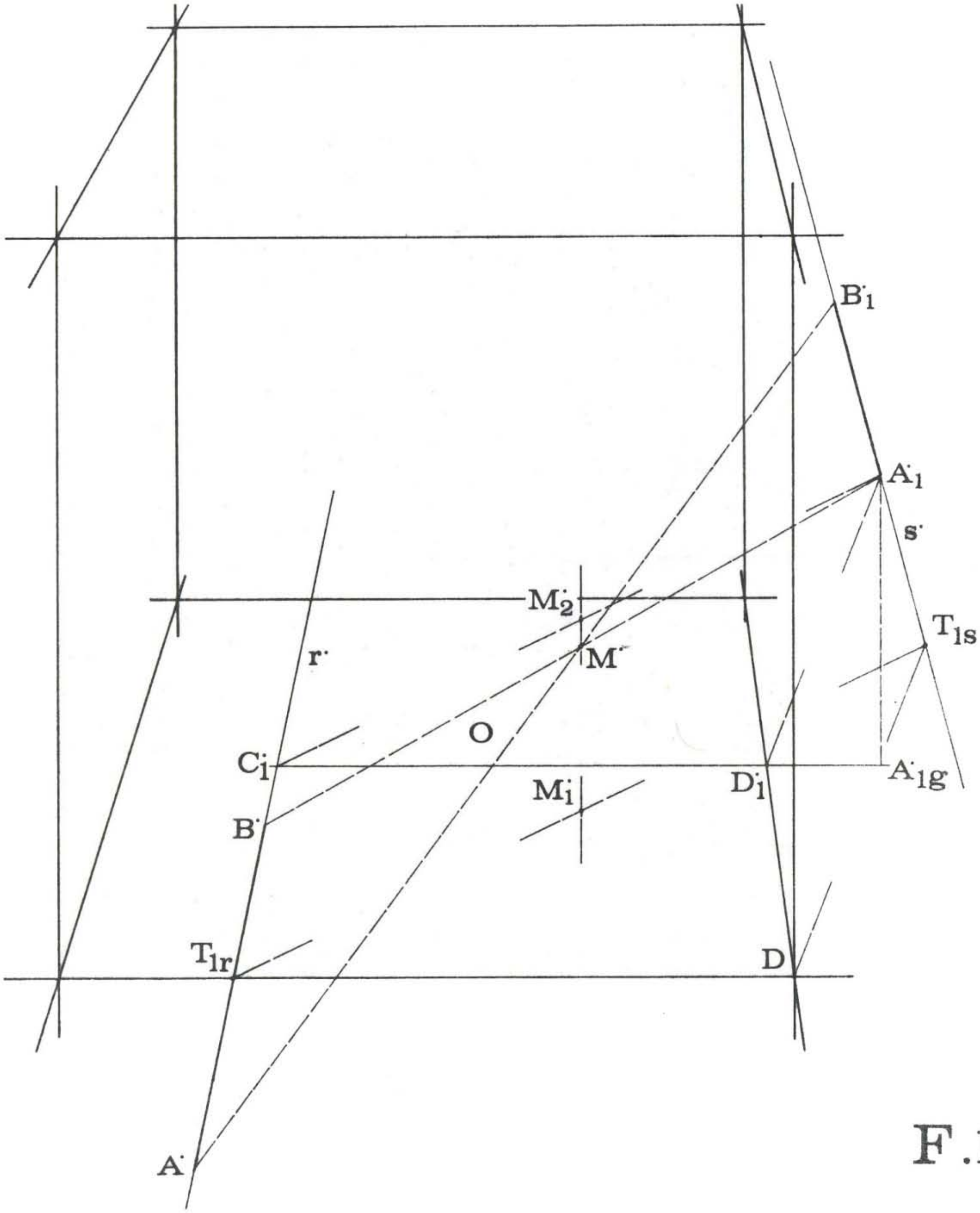
Se, infine, il generico segmento A B è disposto liberamente nello spazio, tracciamo, come prima, il segmento A'_1 C'_1, prospettiva del segmento A_l C_1 disposto sul piano per A_l parallelo al quadro e avente l'estremo C_1 sulla retta r, su cui giace A B (Fig. 15).

Trasliamo, quindi, mediante triangoli omotetici, a' in a'_1 prospettiva di a_l giacente sul piano, per B parallelo al quadro, ed ancora a'_1 in a'_2, avente un estremo in B' e l'altro C' necessariamente sulla retta s', che resta cosi definita.

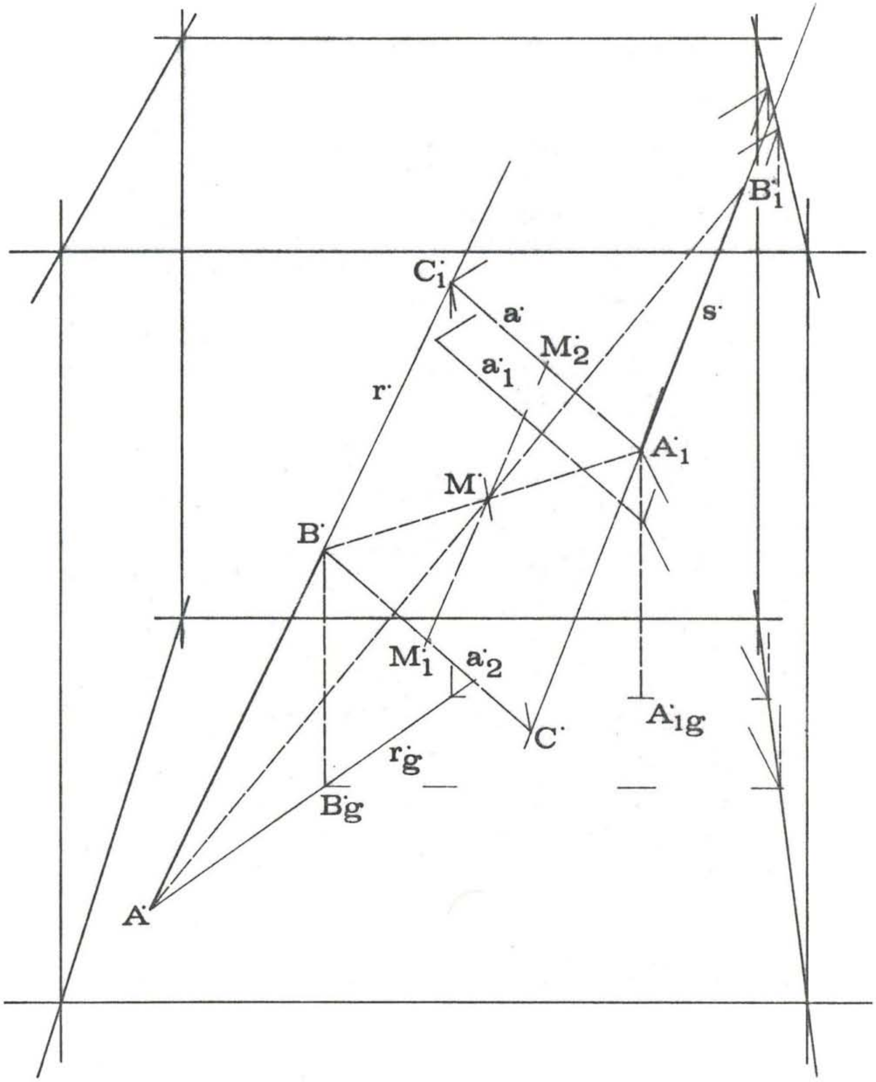
La congiungente i punti M'_1 ed M'_2 dei segmenti B'C' e C'_1 A'_1 interseca la $B'A'_1$ in M', prospettiva del punto M, medio del segmento B-A_1: la retta A' M' taglia, allora, la s' nel punto B'_1, estremo del segmento richiesto, essendo ancora una volta, il triangolo A B M uguale nello spazio al triangolo B_1 A_l M.



F.13



F.14



F.15

Divisione e moltiplicazione prospettica di segmento.

Dato il segmento A'F', prospettiva del generico segmento AF del geometrale, si voglia effettuare la suddivisione in cinque segmenti secondo rapporti noti (Fig. 16).

Si considerino, dunque, i due piani verticali α e β , contenenti rispettivamente gli estremi A ed F del segmento, aventi tracce tgα e tgβ sul geometrale e tracce tvα e tvβ sul piano di riferimento sinistro intersecanti in X_1 e X_2 lo spigolo superiore del cubo.

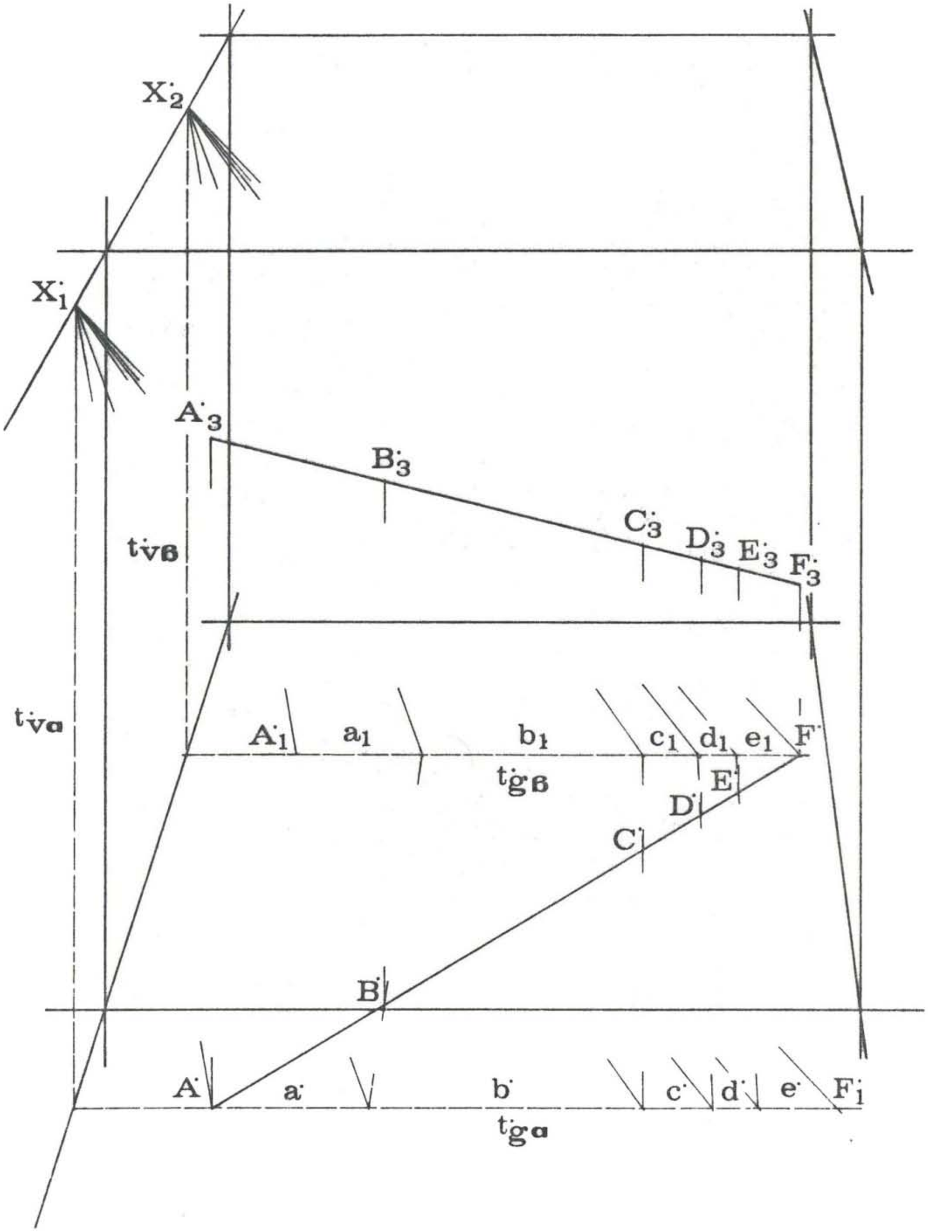
La parallela per X'_1 alla X'_2 F' individua sulla t'gα il punto F'_1, così come la parallela per X'_2 alla X'_1 A' definisce sulla t'gβ il punto A'_1 : i segmenti A'_1-F' e A' - F'_1 sono ovviamente uguali.

Suddividendo, ad esempio, il segmento A' F'_1, secondo i rapporti prefissati, in a', b', c', d', e', è immediato riportare omoteticamente tale suddivisione su A'_1 F' in a_l, b_1, c_1, d_1, e_l, di guisa che le congiungenti i punti corrispondenti sui due segmenti definiscano la prospettiva di rette parallele.

Tali parallele, taglieranno allora, per il teorema di Talete, il segmento A' F' nei punti B', C', D', E', definendo segmenti che stanno fra loro negli stessi rapporti stabiliti.

Se it generico segmento A_3 F_3 è disposto genericamente nello spazio, conviene effettuare dapprima la suddivisione della proiezione A' F' di esso sul geometrale, riportando successivamente i punti di suddivisione in quota mediante rette verticali (parallele), in modo che a B' corrisponda $B'_{3,}$ a C' corrisponda $C'_{3,}$ etc.

Gli stessi concetti e le stesse operazioni potrebbero infine ripetersi , inversamente, per quanto riguarda la moltiplicazione di segmento.


X'2
X'1
A'3
B'3
C'3
D'3
E'3
F'3
t'vβ
t'vα
A'1
a1
b1
c1
d1
e1
F'
t'gβ
E'
D'
C'
B'
A'
a'
b'
c'
d'
e'
F'1
t'gα

F.16

Parallelismo

Data la generica retta s, individuata dalla traccia Tgs sul geometrale e dalla traccia, T_{2s} sul piano di riferimento parallelo al quadro, si voglia tracciare la retta p ad essa parallela, avente traccia nota T_{gp} sul geometrale (Fig. 17).

La orizzontale per T'_{gp} taglia la s'g, proiezione della s sul geometrale in S'g, proiezione del punto S della s.

Qualsiasi segmento parallelo nello spazio al segmento T_{gp}-S e avente l'estremo destro sulla s , individua nell'altro estremo un punto della p, essendo tale condizione necessaria e sufficiente per definire il parallelismo fra rette.

Trasliamo, pertanto, il segmento x , T'_{gp}-S', dapprima in x_1 sul piano di riferimento parallelo al quadro (mediante triangoli omotetici), successivamente in x_2 sullo stesso piano, in modo che abbia l'estremo destro coincidente con T'_{2s}.

Sarà allora l'altro estremo coincidente con la traccia T'_{2p} della p, che rimane così definita, avendo prospettiva p' per T'_{gp} e T'_{2p}.

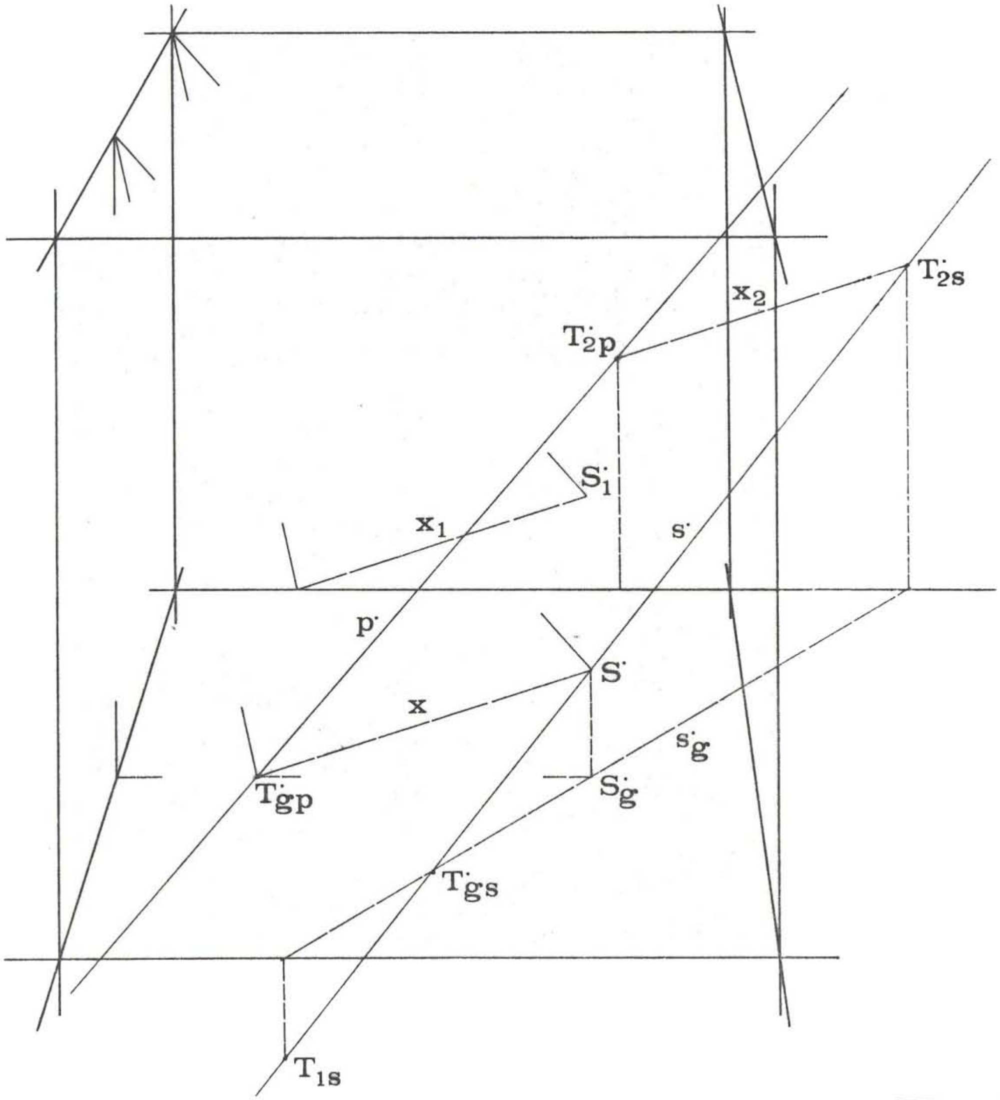
Supponiamo adesso (Fig. 18) di voler tracciare la prospettiva q' della retta q parallela al piano ω e appartenente al piano verticale δ **.**

La orizzontale per T'_{qg}, traccia della q sul geometrale, taglia la traccia $t_{g\omega}$ di ω nel punto P definendo il segmento x, traslato in x_1 sul piano di riferimento parallelo al quadro (mediante triangoli omotetici).

Traslando, ancora una volta il segmento x_1 in x_2, in modo che abbia gli estremi sulla $t'_{2\omega}$ e sulla $t'_{2\delta}$**,** si individua su quest'ultima la prospettiva T'_{2q} della traccia T_{2q} della q, la cui prospettiva q' rimane pertanto definita, avendo imposto mediante x e x_2 la condizione di parallelismo fra la q e la retta p di ω .

Dati infine il generico piano α e un qualsiasi punto S, si voglia individuare il piano β per S parallelo ad α (Fig. 19).

Si tracci la orizzontale per S'g, prospettiva della proiezione Sg di S sul geometrale, incidente in C' la $t'_{g\alpha}$, nonché la parallela s' per S'

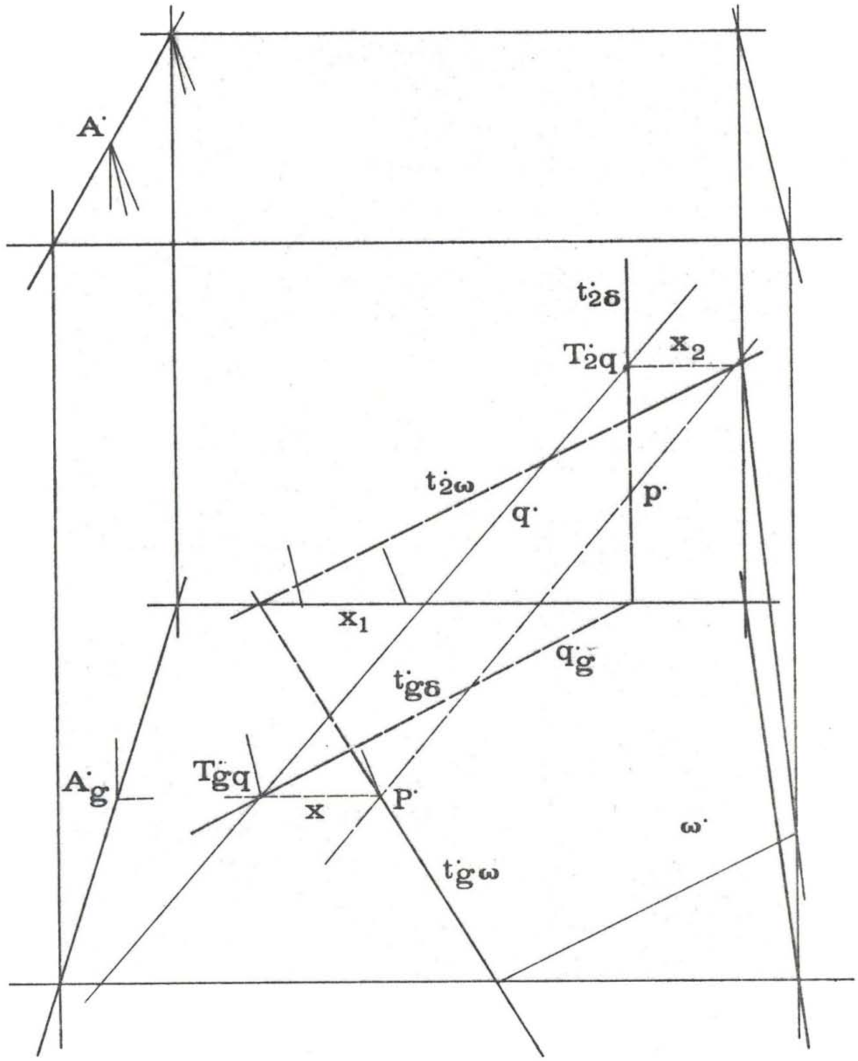


F.17

alla $t_{1\alpha}$ incidente in B' l'orizzontale suddetta.

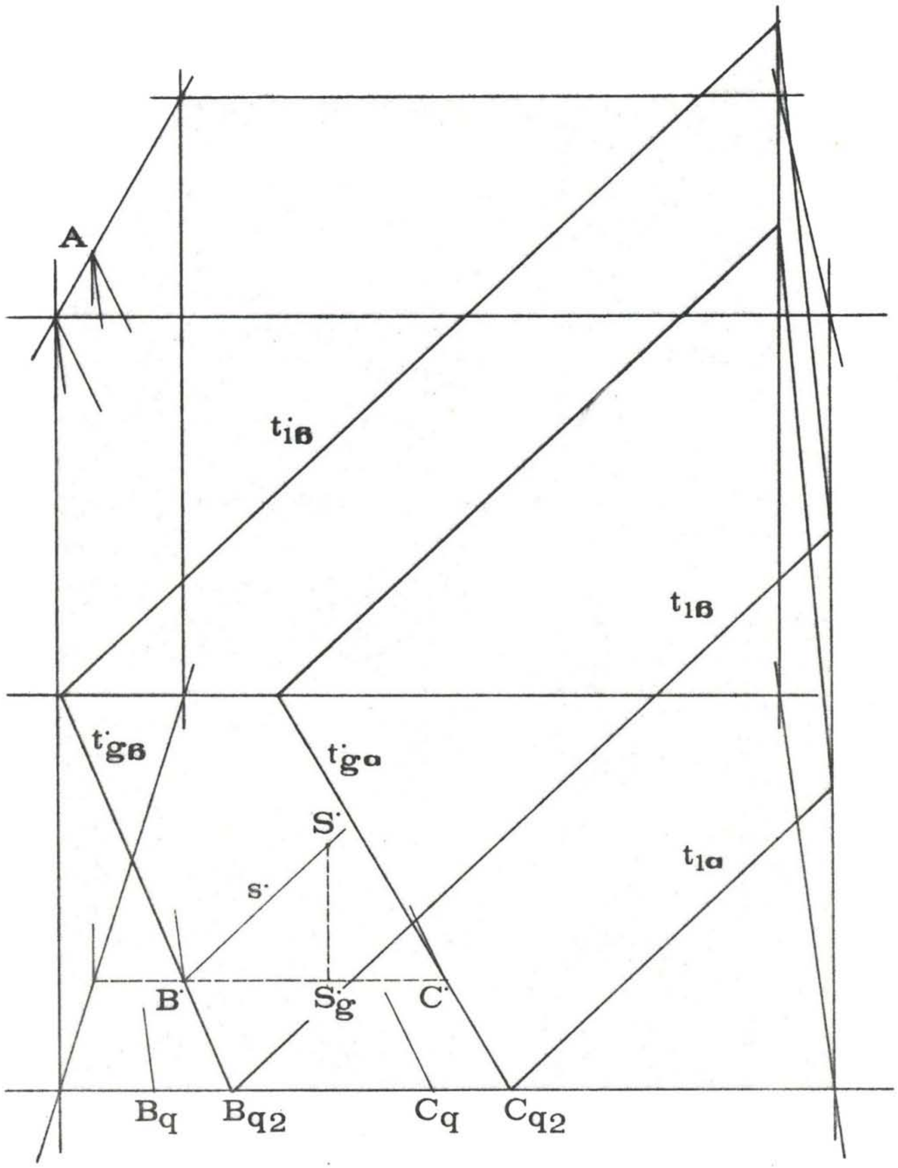
Il punto B' appartiene alla $t'_{g\beta}$, essendo traccia sul geometrale di una frontale di β. Trasliamo ora omoteticamente il segmento B' C' in Bq Cq sul quadro, traslandolo successivmante fino a portare l'estremo C_q in C_{q2} su $t_{1\alpha}$, in modo che l'altro estremo definisca in B_{q2} un secondo punto di $t'_{g\beta}$, la quale resta così definita.

Nota la traccia $t'_{g\beta}$ è immediato ricavare le altre, dovendo essere necessariamente $t_{1\beta}$ e $t_{2\beta}$ parallele a $t_{l\alpha}$.



A'
$t'_{2\delta}$
T'_{2q}
x_2
$t'_{2\omega}$
p'
q'
x_1
q'_g
$t'_{g\delta}$
A'_g
T''_{gq}
x
P'
ω'
$t'_{g\omega}$

F.18



F.19

Rette di massima pendenza del piano rispetto al quadro

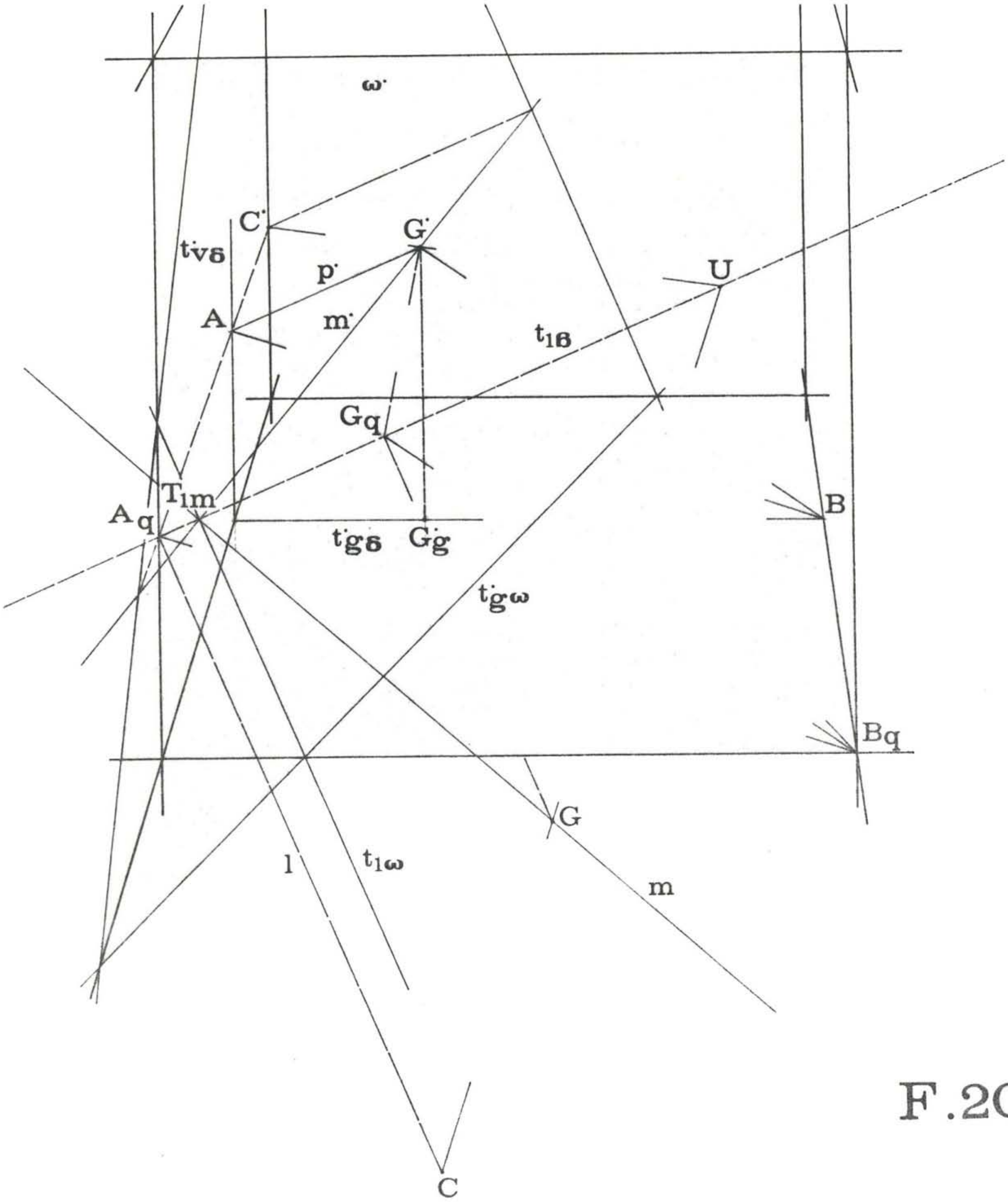
Dato i1 piano ω , si voglia tracciare per un qualsiasi punto G di esso la retta m di massima pendenza rispetto al quadro (Fig. 20).

Si consideri il piano δ , per G parallelo al quadro, avente traccia $t'_{g\delta}$ sul geometrale e $t'_{v\delta}$ sul piano sinistro di riferimento. La prospettiva p' della retta p per G, perpendicolare a $t_{1\omega}$, interseca la $t'_{v\delta}$ nel punto A: i triangoli omotetici A G' B e A_q G_q B_q permettono anzitutto l'individuazione della proiezione Gq di G sul quadro; la A_q G_q taglia poi la $t_{1\omega}$ in T_{1m} , traccia sul quadro della retta m richiesta, che rimane così definita, in quanto intersezione del piano ω col piano β per G perpendicolare al quadro e ad ω .

La retta m può portarsi sul quadro ribaltando il piano β intorno alla $t_{1\beta}$.

Si riporti a tal fine il punto C' in C sulla perpendicolare per A_q alla $t_{1\beta}$ alla distanza 1 (lato del cubo di riferimento): la C' G' ha come omologa la C G per U, essendo questo punto unito nelle due rette, sicché G può ora definirsi come intersezione della C U con la perpendicolare per G_q alla $t_{1\beta}$, dovendo tale perpendicolare corrispondere alla Gq G'.

Noto il punto G può ovviamente tracciarsi la m, per T_{1n} e G, corrispondente alla m' ed è possibile riportare in prospettiva (e viceversa) qualsiasi operazione effettuata sulla m,essendo l'omologia di ribaltamento del tutto definita (oltre l'asse $t_{1\beta}$ sono infatti note le coppie CC' e GG'.



F.20

Perpendicolarità

Dato un generico piano ω, fissato un punto P su di esso, si voglia tracciare la retta per P perpendicolare ad ω (Fig. 21).

Si proietti il punto P, ortogonalmente, al quadro in Pq, mediante i triangoli omotetici A' P' C' e 2Pq D, in modo da individuare nella retta $t_{1\beta}$, perpendicolare per Pq alla $t_{1\omega}$, la traccia sul quadro del piano β ortogonale al quadro e ad ω, contenente il punto P.

Ribaltando il piano β sul quadro il punto P si ritrova sulla perpendicolare per Pq alla $t_{1\beta}$ alla distanza d da Pq.

Tale distanza si può immediatamente ricavare, traslando dapprima d' in 4-B' sul piano di riferimento destro, ribaltando quindi il geometrale sul quadro, appoggiandosi alla coppia di punti omologhi 2-2', in modo che B' si porti in B e 4-B' in 4-B, pari a d.

Noto dunque P, sul piano β ribaltato, è possibile tracciare la G P, retta di massima pendenza di ω rispetto al quadro, e conseguentemente la perpendicolare p per P a quest'ultima, coincidente con la perpendicolare ad ω richiesta, poiché β, come si è detto, ortogonale ad ω.

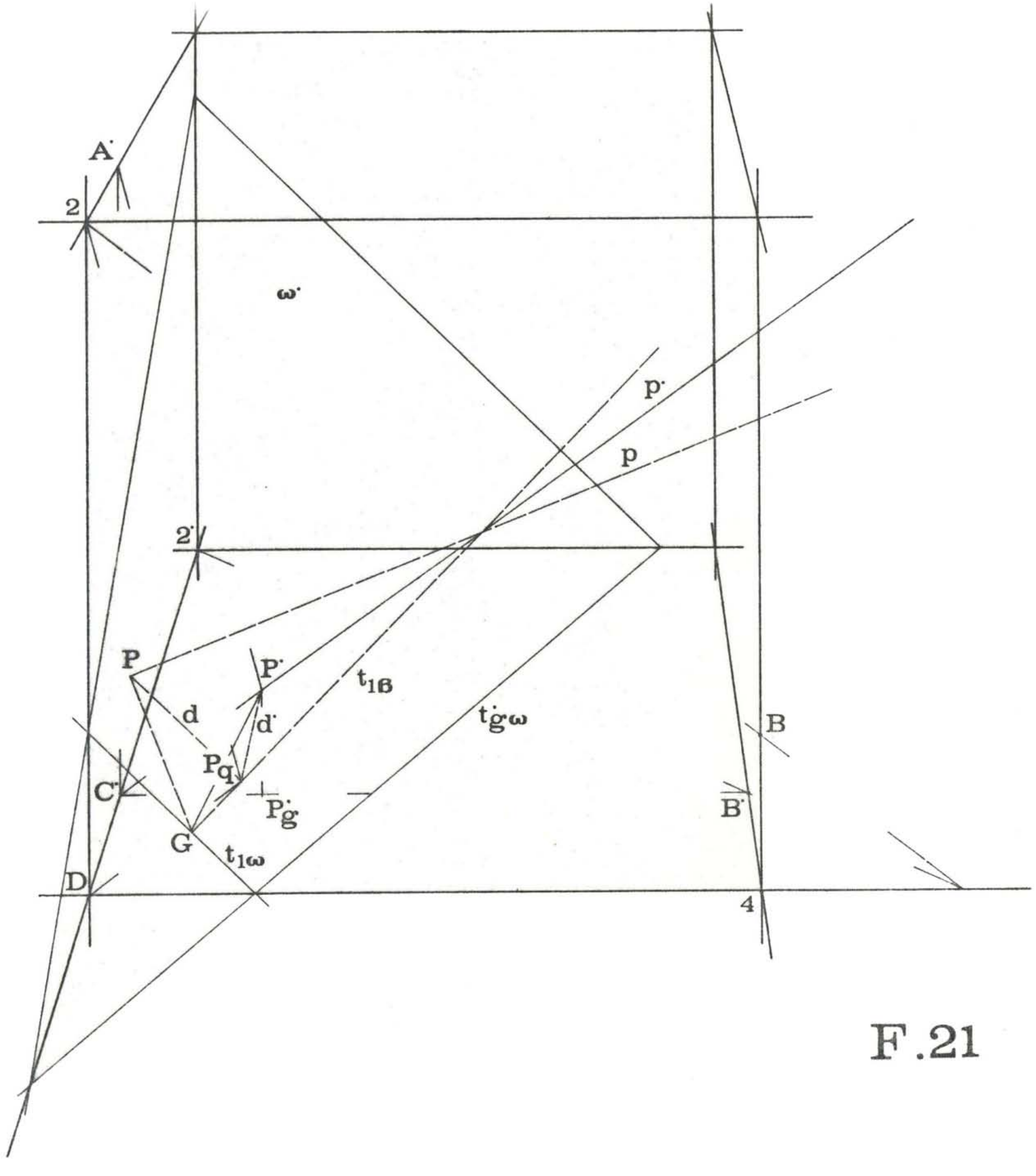
Se poi il punto P, da cui si vuole inviare la perpendicolare, è esterno ad ω, il procedimento concettualmente non cambia, dovendosi ancora ribaltare sul quadro il piano β per P ortogonale al quadro e ad ω, piano incidente ω secondo una retta di massima pendenza di questo rispetto al quadro (si esamini in proposito il paragrafo precedente).

Noti una coppia qualsiasi di punti Q, S ed un piano α, si voglia adesso tracciare il piano δ per Q ed S perpendicolare ad α (Fig. 22).

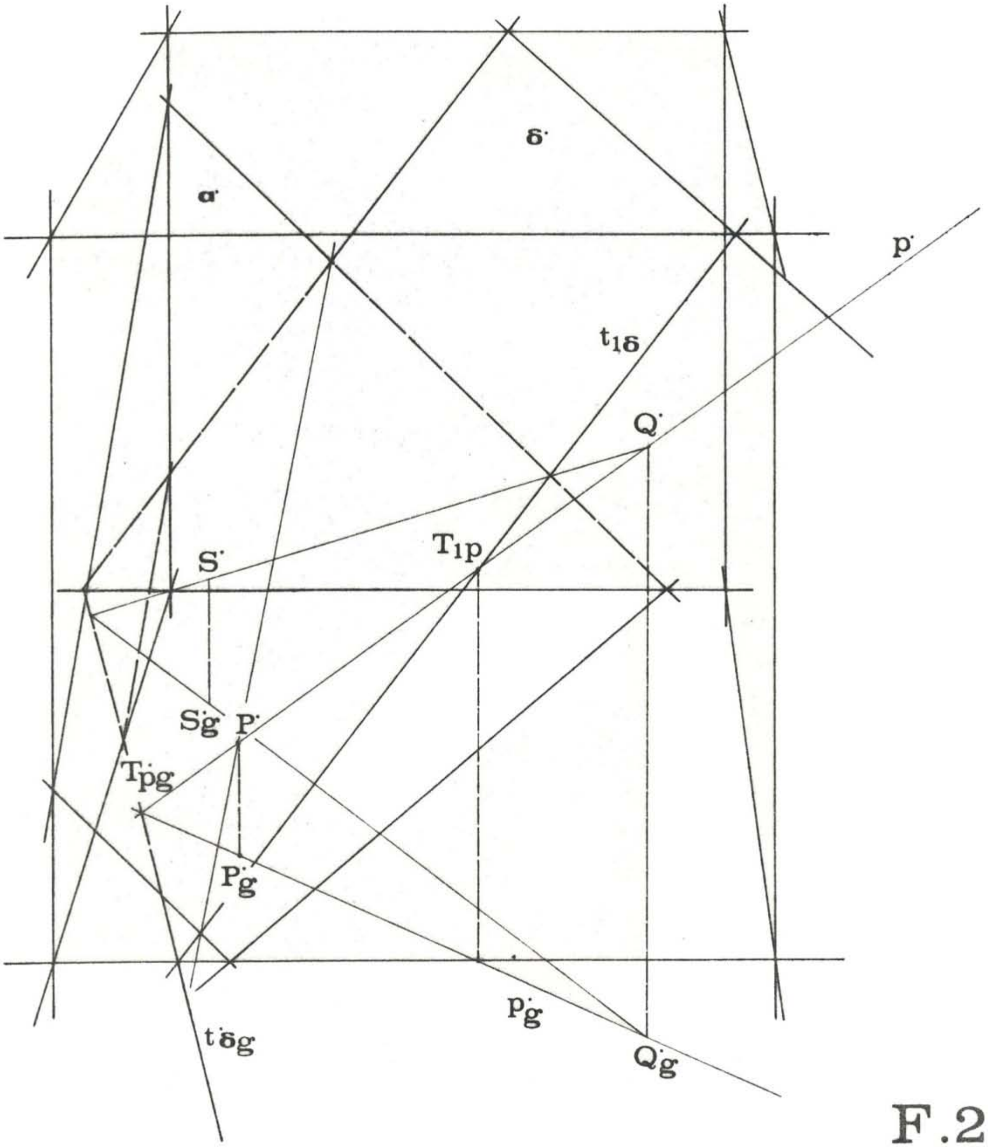
Si individui allora, secondo quanto appena esposto, la perpendicolare p per uno dei punti, ad esempio Q, al piano α: nota tale retta e il punto S, è individuato il piano δ, le cui tracce sono immediatamente individuabili, appoggiandosi ai piani di riferimento e agli elementi noti S', S'g, p', p'g.

Trattando poi la perpendicolarità fra rette, è ben noto che, dato un generico piano α perpendicolare alla retta p, qualsiasi retta di tale piano, (come la r o la q in figura 23) risulta ortogonale alla p.

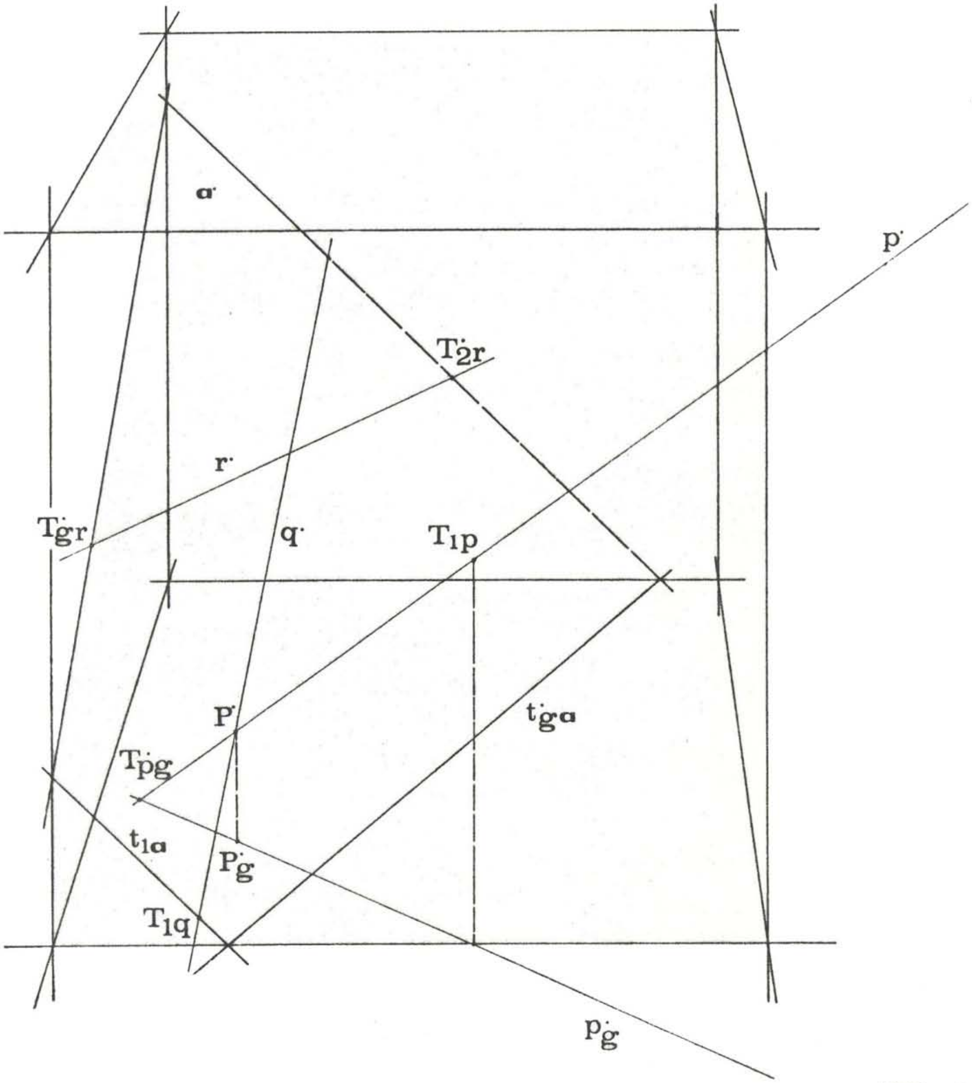
Se, infine, dati la retta r, ed il punto P, si vuol determinare la retta p per P incidente la r e ad essa perpendicolare, conviene dapprima individuare il piano δ per P ed r, quindi ribaltare questo, in modo da effettuare il tracciamento della perpendicolare ribaltata rispetto alla r ribaltata: l'omologa p' della p fornirà ovviamente la retta richiesta.



F.21



F.22



F.23

Rettangolato

Supponiamo di voler disegnare un rettangolato sul geometrale (Fig. 24).

E' noto che, ribaltando il geometrale sul quadro, i vertici 2', 3' del cubo di riferimento hanno come omologhi i vertici 2,3: è immediato pertanto definire l'immagine prospettica A' B' C' D' del rettangolo ABCD ribaltato.

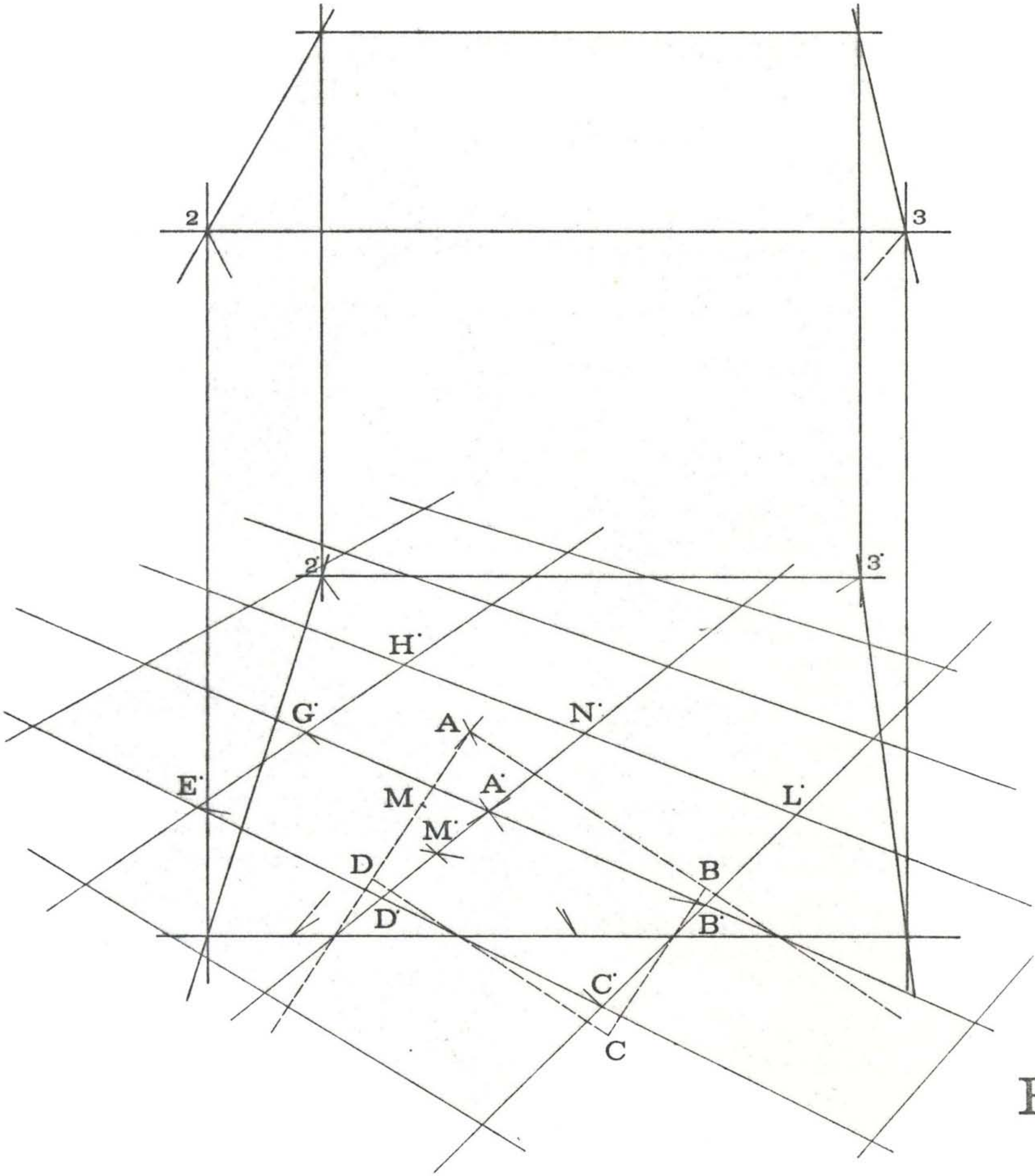
Per disegnare gli altri rettangoli basta individuare, sempre omologicamente, il punto medio di un lato del rettangolo di partenza, ad esempio il punto M del lato AD.

La B' M' taglierà allora la D' C' in E', prospettiva del vertice E di un secondo rettangolo, essendo ED pan a DC.

Analogamente pile tracciarsi tramite la C'M' un secondo vertice G' sulla A' B',completando così la prospettiva E' G' A' D' del rettangolo EGAD.

Possiamo adesso proseguire usando le diagonali di tali rettangoli: la diagonale C' A' definisce infatti, intersecando la E' G', il vertice H', così come la E' A' individua sulla C' B' il vertice L', mentre, per completare, la D' A' taglia la H' L', nel vertice N'.

Essendo tale costruzione ripetibile su qualsiasi coppia di rettangoli, è pertanto possibile estendere rapidamente il reticolo in qualsiasi direzione.



F.24

Coniche e quadriche

Qualsiasi conica (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole) può tracciarsi in prospettiva quando siano note le immagini prospettiche di due qualunque elementi coniugati di essa. (Fig. 25).

Ad elementi coniugati (assi, diametri, corde) corrispondono, infatti in prospettiva elementi coniugati ed è possibile quindi costruire la conica mediante le usuali costruzioni omologiche.

Così, ad esempio, possedendo in prospettiva le corde coniugate A' B' e C' D' della iperbole b', prospettiva della conica b appartenente al generico piano α , è immediato instaurare l'omologia che fa corrispondere alla b' la circonferenza $\underline{b}$ avente diametro A' B'. Tale omologia, come si sa, ha per asse la retta a contenente A' B' e per centro il punto O definito dalle coppie di punti omologhi $\underline{C}$, C' e $\underline{D}$, D' (dovendo corrispondere necessariamente alla C'D' la corda $\underline{CD}$), permettendo così di tracciare per ogni punto della b un punto della b'.

Rivolgiamoci adesso alla rappresentazione delle superfici quadriche specializzate (coni e cilindri).

Per disegnare il generico cono in prospettiva basta riportarne il vertice ed una qualsiasi conica direttrice: le tangenti mandate dal vertice alla conica definiscono, infatti, il contorno apparente del cono.

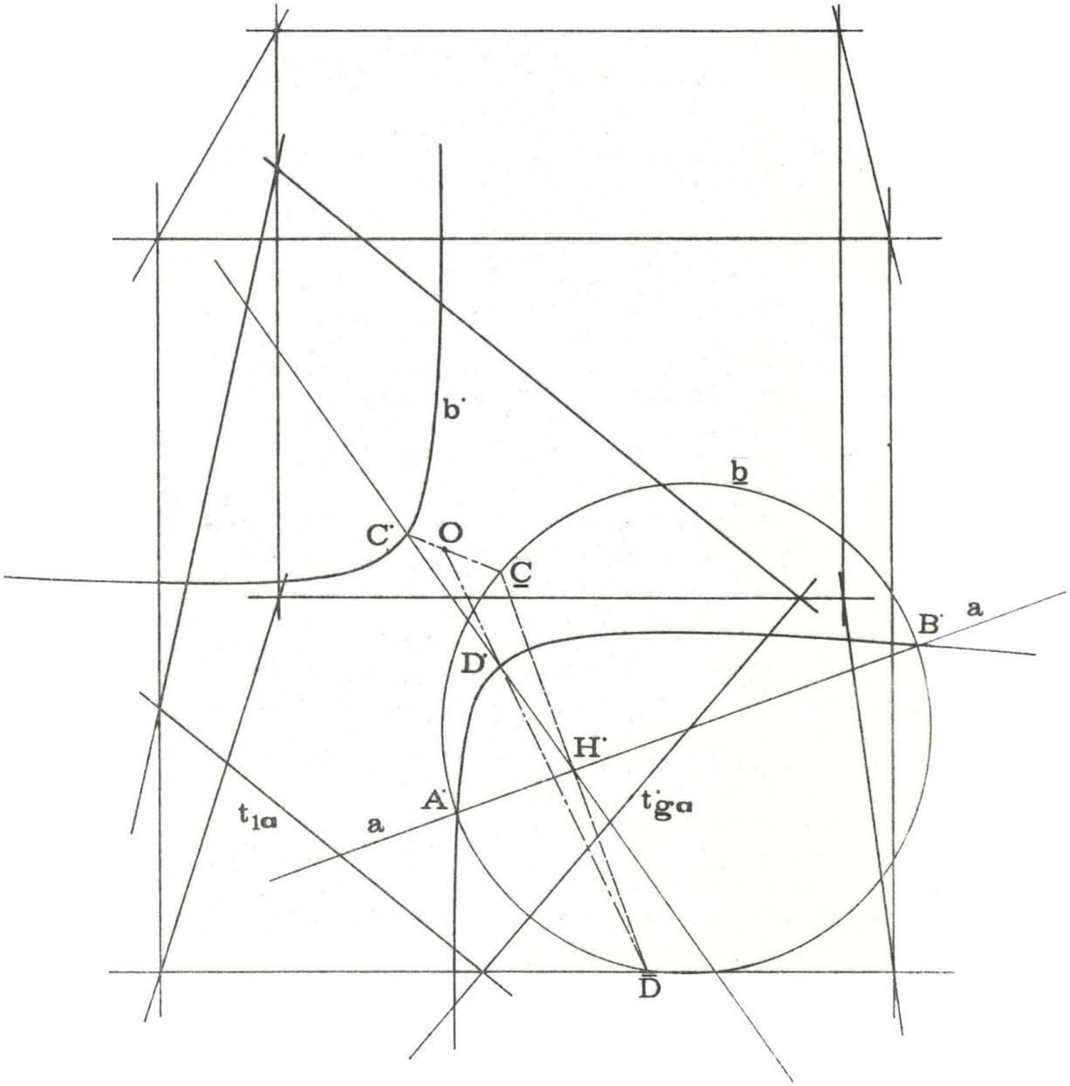
Nel caso del cilindro occorrerà riportare due coniche direttrici individuando, come prima, il contorno apparente mediante le tangenti ad esse.

Per rappresentare poi le quadriche a punti ellittici ed iperbolici (ellissoidi, paraboloidi ed iperboloidi), basta riportare in prospettiva tre qualsiasi elementi coniugati di esse, corde, diametri o assi.

Ancora una volta tali elementi rimangono coniugati nell'immagine prospettica, permettendo di tracciare rapidamente il contorno apparente della quadrica (1).

(1) - In prospettiva il contorno di una qualsiasi quadrica è una conica, trattandosi della proiezione sul quadro dal punto di vista V della conica polare di V rispetto alla quadrica: esso sarà un'ellisse, una parabola o un'iperbole secondo che la polare suddetta sia esterna, tangente o secante il piano limite (piano per V parallelo al quadro).

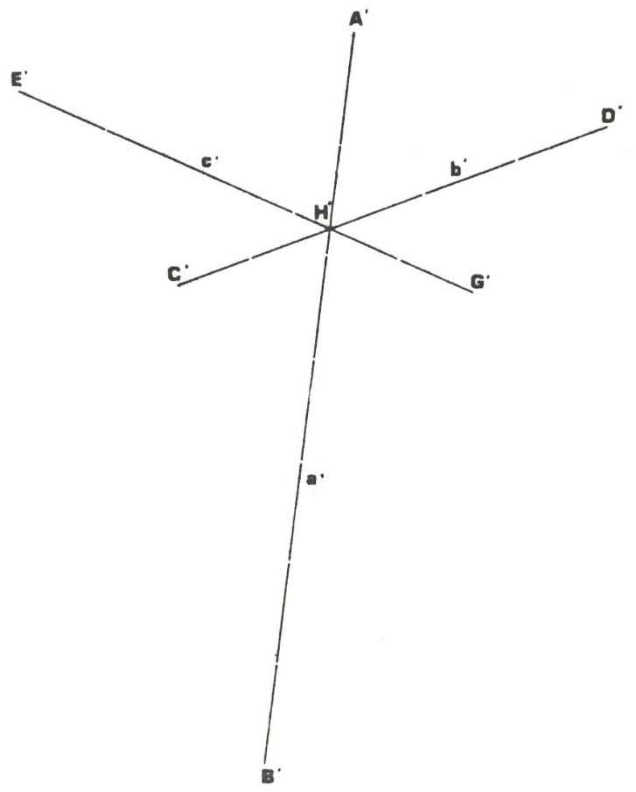
Supponiamo, ad esempio, di aver riportato in prospettiva i tre assi a, b, c di un ellissoide comunque disposto nello spazio (Fig. 26).



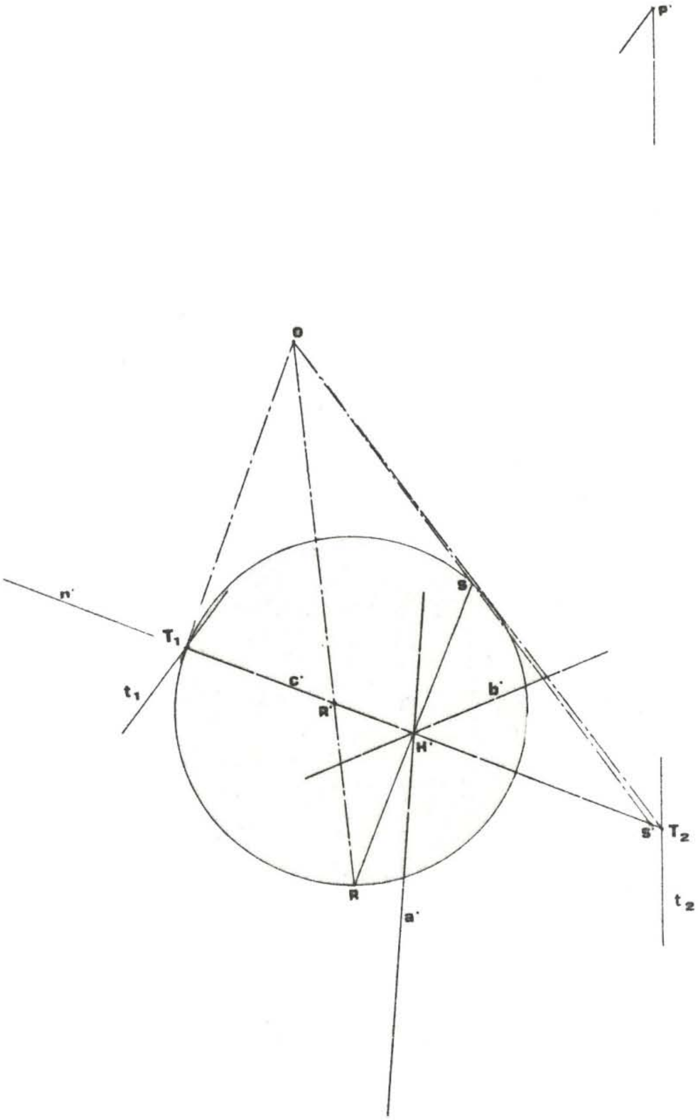
F.25

Si considerino, ad esempio, a' e b', prospettiva di a e b, corde coniugate nella ellisse proiezione corrispondente e, senza costruire quest'ultima, si determini la corda R'S' giacente sul piano π proiettante il terzo asse c, nonché il polo P' ad essa corrispondente (Fig. 27): a tal fine ci si serva dell'omologia ad asse e centro propri instaurabile tra l'ellisse suddetta e la circonferenza avente per diametro a' o b'.

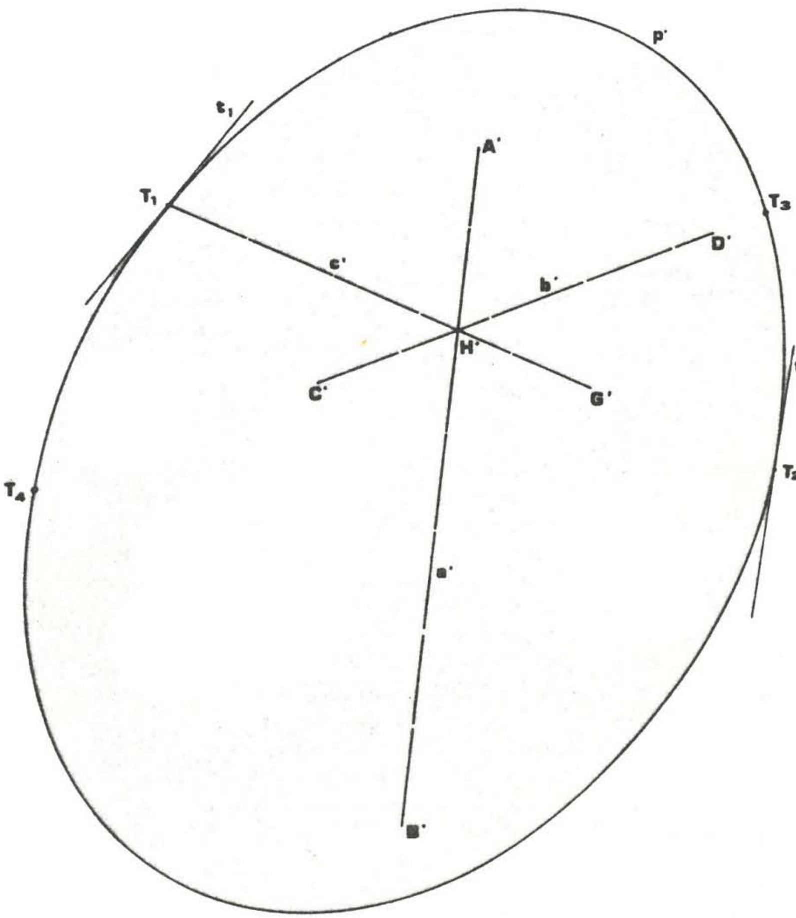
Le corde R'S' e c' sono prospettiva degli assi dell'ellisse sezione q giacente su π mentre in P', proiezione del polo di π rispetto alla quadrica, fugano le tangenti all'ellissoide nei punti della q coniugati ad π .
Le due fuganti in P' contenenti gli estremi T_1 e T_2 della proiezione q' della q, sono tangenti nei punti suddetti la conica p', prospettiva dell'ellissoide, in quanto rette contorno del cilindro tangente nella conica q la quadrica.
Per trovare i punti T_1 e T_2 basta considerare le due corde coniugate R'S' e c' della q' ed applicare la nota omologia.
In tal caso, alla corda R'S' corrisponde la corda RS perpendicolare per H' alla c': le tangenti dal centro di omologia O la circonferenza, dovendo tangere pure la q', individuano sull'asse di omologia c' i punti T_1 e T_2 richiesti.
Tracciate dunque per T_1 e T_2 le due rette t_1 e t_2 contenenti P', occorre ripetere quanto esposto, prendendo in considerazione, stavolta, ad esempio, le corde a' e c', in modo da ricavare almeno un altro punto della conica contorno, di guisa che essa (essendo noti così tre punti e due tangenti in essi) risulti definita e rapidamente tracciabile (Fig. 28).



F.26



F.27



F.28

BIBLIOGRAFIA

G. M. CATALANO, Proiettività tra immagini orografiche, Co.Gra.S., Palermo, 1988.

M. INZERILLO, Lezioni di Applicazioni di Geometria Descrittiva, Co.Gra.S., Palermo, 1977.

R. FILOSTO, Lineamenti teorici del disegno, Ila Palma, Palermo, 1968.

V. CAPITANO, Applicazioni di Geometria Proiettiva e Descrittiva al disegno delle forme geometriche elementari, Ila Palma, Palermo, Sao Paulo, 1972.

U. SACCARDI, Applicazioni di Geometria Descrittiva, Libreria Editrice Fiorentina, Firenze, 1977.

G. DE FIORE, M. DOCCI, C. JANNICCARI, A. PASCUCCI, Teoria della rappresentazione architettonica, Facoltà di Architettura, Roma, 1984.

R. DE RUBERTIS, Nota sulle proiezioni assonometriche, Facolta di Architettura, Roma, 1987.

R. FILOSTO, Assonometria per ribaltamento, Ed. Palma, Palermo, 1963. G.

M. CATALANO, Prospettiva sferica, Co.Gra.S., Palermo, 1985.

G. M. CATALANO, Prospettiva delle quadriche, Co.Gra.S., Palermo, 1987.

A. SGROSSO, A. VENTRE, Elementi di geometria proiettiva e di geometria descrittiva, Massimo, Napoli, 1979.

M. INZERILLO, Lezioni di teoria del disegno prospettico, Co.Gra.S., Palermo, 1977.

C. CUNDARI, Teoria della rappresentazione dello spazio architettonico. Applicazioni di geometria descrittiva, Ed. Kappa, Roma, 1983.

L. CAMPEDELLI, Lezioni di geometria, Cedam, Padova, 1960. G.

SELLER, Geometria descrittiva, U. Hoepli, Milano, 1960.

INDICE